Geometria e algebra lineare 2

Esercizi su prodotti scalari e prodotto vettoriale

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione $\varphi : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \times \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}$ definita da $\varphi(p,q) = \int_0^1 p(x)q(x)dx$.

(i) Dimostrare che φ è un prodotto scalare.

(ii) Scrivere la matrice A associata a φ rispetto alla base canonica $\{1, x, x^2\}$.

(iii) Determinare una base ortonormale per φ.

(iv) Determinare una matrice C tale che ${}^tCAC = I$.

(v) Scelta un'orientazione, calcolare il prodotto vettoriale rispetto a φ dei polinomi 1 e x.

Esercizio 2. Sia $\varphi : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'applicazione definita da $\varphi(A,B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$.

(i) Dimostrare che φ è un prodotto scalare.

(ii) Sia $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ il sottospazio delle matrici simmetriche. Determinare il suo ortogonale rispetto a φ.

Esercizio 3. Determinare per quali valori del parametro $t \in \mathbb{R}$ i vettori

$$v = \begin{pmatrix} -2 \\ t \\ 2-t \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 4 \end{pmatrix}$$

risultano ortogonali rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$. Per tali valori di t, completare v e w ad una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 4. Determinare le proiezioni ortogonali del vettore

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

sugli iperpiani $H : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ e $K : x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0$ e sulla loro intersezione.

Esercizio 5. Calcolare il volume del tetraedro di vertici:

$$V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione $2n$ e sia $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare non degenere avente entrambi gli indici di positività e negatività uguali a n.

(i) Dimostrare l'esistenza di un sottospazio W di V di dimensione n che sia isotropo rispetto a φ, cioè tale che $\varphi|_{W \times W} = 0$.

(ii) Esistono sottospazi isotropi di V di dimensione $> n$?