

Geometria e algebra lineare 2

Esercizi su spazi affini, geometria nel piano e nello spazio euclideo

Esercizio 1. Indichiamo con V uno spazio vettoriale e con S un sottoinsieme di $\mathbb{A}(V)$. Dire se S è un sottospazio affine di $\mathbb{A}(V)$ (precisando eventualmente la sua giacitura) nei seguenti casi:

- (i) $V = \mathbb{R}^2$ e $S = r \cup s$ l'unione di due rette r, s passanti per l'origine;
- (ii) $V = M_n(\mathbb{R})$ e S il sottoinsieme delle matrici la cui traccia è uguale a 1;
- (iii) $V = M_4(\mathbb{C})$ e S l'insieme delle matrici della forma

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 1 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 1 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 1 & a_{44} \end{pmatrix};$$

- (iv) $V = \mathbb{R}[x]$ e $S = \mathbb{R}_n[x]$ l'insieme dei polinomi di grado n ;
- (v) $V = \mathbb{R}[x]$ e S l'insieme dei polinomi $p(x)$ tali che $p(x) - x^5$ ha grado minore o uguale a 3.

Esercizio 2. Nel piano euclideo \mathbb{R}^2 si considerino la retta $r : x + y = 0$ e il punto $P = (1, 5)$. Determinare:

- (i) la retta passante per P e ortogonale a r ;
- (ii) tutte le rette passanti per P e a distanza 1 dall'origine;
- (iii) la rette passanti per P e che formino un angolo di $\pi/6$ con l'asse delle y .

Esercizio 3. Nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 si considerino la retta $r : (x, y, z) = (3t, t - 2, 1 - t)$, $t \in \mathbb{R}$, e il punto $P = (0, 1, 2)$. Determinare:

- (i) la retta passante per P e parallela a r ;
- (ii) la retta passante per P , ortogonale e incidente a r ;
- (iii) la distanza di P da r .

Esercizio 4. Nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 si considerino le rette $r : x + y - 1 = y - z = 0$ e $s : 3x - 2y + z - 2 = x - 3z + 2 = 0$.

- (i) Verificare che r e s sono sghembe.
- (ii) Determinare la retta r' perpendicolare a r e a s .
- (iii) Determinare la distanza tra r e s .
- (iv) Determinare l'angolo tra la retta r e il piano $\pi : x - y + z + 2 = 0$.
- (v) Determinare la retta r'' parallela alla retta di equazioni $x - 5 = y - z + 4 = 0$ e incidente sia r che s .

Esercizio 5. Nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 si considerino il piano $\pi : x - y + 2z = 0$ e la retta $r : x + 2y - 3 = x - z - 1 = 0$

- (i) Determinare il piano π' ortogonale a π e contenente r .
- (ii) Determinare i punti di r che hanno distanza $\sqrt{6}$ dalla retta $s = \pi \cap \pi'$.
- (iii) Scrivere le equazioni di π' nel sistema di riferimento affine determinato dai punti $Q_0 = (1, 1, 0)$, $Q_1 = (2, 0, 2)$, $Q_2 = (1, 3, 1)$ e $Q_3 = (6, 2, -2)$.