Geometria e algebra lineare 2

Esercizi su isometrie

Esercizio 1. Scrivere la matrice che rappresenta nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ la riflessione rispetto al piano di equazione cartesiana $x + y + 2z = 0$.

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^n$ si considerino tre punti P_1, P_2, P_3 tali che $\|\vec{P_1P_2}\| = \|\vec{P_1P_3}\|$. Dimostrare l'esistenza di un iperpiano $H \subset \mathbb{R}^n$ tale che la riflessione rispetto ad H fissi P_1 e scambi P_2 e P_3.

Esercizio 3. Data una matrice ortogonale $C \in O_n(\mathbb{R})$. indichiamo con $f_C : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ il coniugio rispetto ad C, cioè $f_C(A) := C^{-1}AC$. Dimostrare che f_C è un'isometria di $M_n(\mathbb{R})$ rispetto al prodotto scalare $\varphi(A, B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$.

Esercizio 4. Si dimostri che ogni matrice in $O_2(\mathbb{R})$ è del tipo

$$R_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ oppure } S_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Si descrivano geometricamente le applicazioni date dalle matrici R_θ e S_θ.

Esercizio 5. Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione dispari e sia $T : V \to V$ un operatore unitario. Dimostrare che esiste un vettore $v_0 \in V$ non nullo tale che $T(T(v_0)) = v_0$. Questa affermazione è ancora vera se V ha dimensione pari?

Esercizio 6. Scrivere l'unica affinità $f : \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ tale che

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$