Geometria e algebra lineare 2

Esercizi di riepilogo

Esercizio 1. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ si considerino la retta $r : x - y - 1 = z = 0$ e il piano $\pi : x + 2y - z - 2 = 0$.

(i) Determinare la posizione di r rispetto a π.

(ii) Determinare le equazioni cartesiane della retta r' proiezione ortogonale di r sul piano π.

(iii) Determinare l'angolo convesso tra r e r'.

(iv) Determinare le equazioni parametriche della retta s che si ottiene riflettendo r rispetto al piano π.

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. In ognuno dei seguenti casi dire, motivando la risposta, se esiste una matrice ortogonale A tale che:

(i) $Av_1 = v_2$.

(ii) $Av_1 = v_1$ e $Av_2 = v_2$.

(iii) $Av_1 = v_2$ e $Av_2 = -v_2$.

(iv) $Av_1 = v_1 - v_2$.

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n dotato di prodotto scalare $\langle\, , \rangle$. Sia $f : V \to V$ un'applicazione lineare tale che $\langle f(v), f(w) \rangle = 0$ per ogni coppia di vettori v, w tali che $\langle v, w \rangle = 0$. Dimostrare che esistono $\lambda \in \mathbb{R}$ e un'isometria $g : V \to V$ tali che $f = \lambda g$.

Esercizio 4. Si studi la segnatura della forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^3$ la cui matrice associata rispetto alla base canonica è

$$\begin{pmatrix} k & k+1 & k+2 \\ k+1 & k+2 & k+1 \\ k+2 & k+1 & k \end{pmatrix},$$

al variare del paramtero $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5. Si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$. Si dica se esiste una forma bilineare φ su V tale che:

- il radicale di φ sia il sottospazio generato da x,
- $x + 1$ e $x^2 + 1$ siano vettori isotropi,
- $\varphi(x^2 + 4x + 2, x^2 + 4x + 2) = 2$.