# Geometria e algebra lineare 2

## Esercizi su isometrie

**Esercizio 1.** Si consideri $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare standard e, al variare di $k \in \mathbb{R}$ sia $f_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione definita da

$$f_k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx + w \\ y + k^2 z \\ y + kz \\ k^2 x + w \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare i valori di $k$ per cui l'endomorfismo $f_k$ è simmetrico.

(ii) Per uno di tali valori determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori di $f_k$.

(iii) Esistono valori di $k$ per cui $f_k$ è un'isometria?

**Esercizio 2.** Sia $A$ una matrice ortogonale.

(i) Dimostrare che gli unici possibili autovalori reali di $A$ sono 1 e $-1$.

(ii) Dimostrare che gli autospazi di $A$ relativi agli autovalori 1 e $-1$ sono tra loro ortogonali.

(iii) Usare i punti precedenti per dimostrare che una matrice ortogonale è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ se e soltanto se è simmetrica.

**Esercizio 3.** Sia $A$ una matrice reale simmetrica definita positiva. Si dimostri che se esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $A^k = I$, allora $A = I$.

**Esercizio 4.** Si consideri lo spazio vettoriale $V = M_2(\mathbb{C})$ e l'applicazione $\varphi : V \times V \to \mathbb{C}$ definita da $\varphi(A, B) = \mathrm{tr}({}^t\overline{B}A)$.

(i) Dimostrare che $\varphi$ è una forma hermitiana definita positiva.

(ii) Sia $F : V \to V$ l'applicazione lineare definita ponendo $F(A) = {}^tA$. Dimostrare che $F$ è un operatore hermitiano rispetto a $\varphi$, cioè che $\varphi(F(A), F(B)) = \varphi(A, B)$ per ogni coppia di matrici $A$ e $B$.

**Esercizio 5.** (i) Dimostrare che una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ rappresenta la proiezione ortogonale su un iperpiano $H$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ se e solo se è simmetrica, $A^2 = A$ e $\mathrm{rk}A = n - 1$.

(ii) Dire se esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che la matrice

$$\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & a \\ -1/3 & 2/3 & b \\ 1/3 & 1/3 & c \end{pmatrix}$$

rappresenti la proiezione ortogonale su un piano di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla base canonica. In caso affermativo, determinare tali valori.