UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE210 - Geometria 2

a.a. 2019-2020

Prima prova di esonero

TESTO E SOLUZIONI

1. Sia K un campo di caratteristica diversa da 2 e sia $k \in K$. Sia V un K-spazio vettoriale e sia $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ una sua base.

(a) Mostrare che esiste un'unica forma bilineare simmetrica $b : V \times V \to K$ tale che, se $q : V \to K$ è la forma quadratica associata, allora si ha

$$q(e_1) = -1, q(e_2) = k, q(e_3) = -k, q(e_1 + e_2) = k - 1, q(e_2 + e_3) = 0$$

e il coefficiente di Fourier di $5e_1 + 2e_3$ rispetto a e_1 è 1.

(b) Sia $K = \mathbb{R}$. Calcolare la matrice di b nella forma canonica di Sylvester.

(c) Sia $K = \mathbb{C}$. Trovare una base diagonalizzante b e scrivere la matrice di b nella forma canonica.

SOLUZIONE:

(a) Come è noto si ha che, per ogni $i, j \in \{1, 2, 3\}$,

$$b(e_i, e_j) = \frac{1}{2}\big(q(e_i + e_j) - q(e_i) - q(e_j)\big)$$

da cui deduciamo che

$$b(e_1, e_1) = -1, b(e_1, e_2) = 0, b(e_2, e_2) = k, b(e_2, e_3) = 0, b(e_3, e_3) = -k.$$

Inoltre

$$1 = a_{e_1}(5e_1 + 2e_3) = \frac{b(5e_1 + 2e_3, e_1)}{b(e_1, e_1)} = \frac{-5 + 2b(e_3, e_1)}{-1}$$

e quindi

$$b(e_3, e_1) = 2.$$

Questo definisce univocamente una forma bilineare simmetrica b su V tale che

$$M_e(b) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & k & 0 \\ 2 & 0 & -k \end{pmatrix}.$$

(b) e (c) Sia $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Si ha $b(e_1, e_1) = -1$, quindi e_1 non è isotropo. Poniamo $f_1 = e_1$.

Siano $\alpha, \beta, \gamma \in K$ e sia $v = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$. Si ha

$$b(v, e_1) = 0 \text{ se e solo se } \alpha = 2\gamma.$$

Ora, se $\alpha = 2\gamma$, si ha

$$q(v) = k(\beta^2 - \gamma^2) + 4\gamma^2$$

e quindi, per esempio,

$$f_2 := 2e_1 + e_2 + e_3$$

appartiene a $e_1^{\perp}$ ed è non isotropo, essendo $q(f_2) = 4$.

Ora cerchiamo $w \in V$ tale che $w \perp f_1$ e $w \perp f_2$. Sia $w = \alpha' e_1 + \beta' e_2 + \gamma' e_3$.

Si ha $w \perp f_1$ se e solo se $w = 2\gamma' e_1 + \beta' e_2 + \gamma' e_3$. Inoltre $w \perp f_2$ se e solo se

$$0 = b(2\gamma' e_1 + \beta' e_2 + \gamma' e_3, 2e_1 + e_2 + e_3) = k\beta' + (4 - k)\gamma'$$

da cui, per esempio, possiamo scegliere $\beta' = k - 4, \gamma' = k$. Sia

$$f_3 = 2ke_1 + (k - 4)e_2 + ke_3.$$

Allora

$$f = \{f_1, f_2, f_3\} \text{ è una base di } V \text{ che diagonalizza } b$$

in quanto abbiamo già visto che $b(f_i, f_j) = 0$ per $i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j$ e inoltre si tratta di una base dato che

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2k & k-4 & k \end{vmatrix} = 4.$$

Ora

$$\det(M_e(b)) = k(k - 4)$$

mentre gli unici minori 2×2, possibilmente non nulli, di $M_e(b)$, che orlano -1, sono

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} = -k \text{ e } \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -k \end{vmatrix} = k - 4$$

da cui deduciamo che

$$r((M_e(b)) = \begin{cases} 2 & \text{se } k = 0,4 \\ 3 & \text{se } k \neq 0,4 \end{cases}.$$

Se $K = \mathbb{C}$ otteniamo che la matrice di b nella forma canonica è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ se } k = 0,4; I_3 \text{ se } k \neq 0,4$$

e questo conclude (c).

Per (b) già sappiamo che la forma canonica di Sylvester di b avrà un 1 e un -1, dato che $q(f_2) > 0, q(f_1) < 0$. Per il terzo valore osserviamo che il segno del determinante si conserva tra matrici congruenti, quindi il terzo valore dipenderà dal segno di $k(k-4)$.

Si deduce che la forma canonica di Sylvester di b è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ se } k < 0 \text{ o } k > 4; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ se } k = 0,4; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ se } 0 < k < 4$$

e questo conclude (b). ■

2. Sia $V = M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale euclideo delle matrici 2×2 con prodotto scalare

$$< \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} >= aa' + bb' + cc' + dd'.$$

Sia $k \in \mathbb{R}$, sia $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ e sia $T : V \to V$ l'applicazione lineare definita da $T(A) = BA$ per ogni $A \in M_2(\mathbb{R})$.

(a) Determinare l'operatore aggiunto a T.

(b) Usando un'opportuna base di V, determinare per quali k si ha che T definisce un operatore unitario su V.

(c) Calcolare $\|T(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) \wedge T(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})\|$.

SOLUZIONE:

(a) Come è noto, l'operatore aggiunto ha, in una base ortonormale, come matrice la matrice trasposta. Sia

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

una base ortonormale di V. Si ha

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -e_1, T(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -e_2,$$

$$T(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix} = ke_3, T(e_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = ke_4$$

quindi la matrice di T nella base $e = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ è

$$M_e(T) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

Dato che questa matrice è simmetrica, deduciamo che ${}^tT = T$.

(b) Essendo e una base ortonormale, si ha che T è un operatore unitario se e solo se $M_e(T)$ è ortogonale, ovvero se e solo se

$$I_4 = M_e(T)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^2 \end{pmatrix},$$

quindi se e solo se $k = \pm 1$.

(c) Si ha

$$T(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = T(e_1 + e_2) = -e_1 - e_2, T(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = T(e_1 + e_3) = -e_1 + ke_3.$$

Osserviamo che allora

$$T(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) \text{ e } T(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$$

appartengono allo spazio vettoriale euclideo $< e_1, e_2, e_3 >$ e quindi ha senso calcolare il prodotto vettoriale $T(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) \wedge T(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$. Per una ben nota formula si ha

$$\|T(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) \wedge T(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})\| = \|(-e_1 - e_2) \wedge (-e_1 + ke_3)\| =$$

$$= \sqrt{\| - e_1 - e_2\|^2 \| - e_1 + ke_3\|^2 - < -e_1 - e_2, -e_1 + ke_3 >^2} = \sqrt{1 + 2k^2}. \blacksquare$$

3. Sia E uno spazio euclideo di dimensione 3 e sia $\{O, i, j, k\}$ un suo sistema di coordinate cartesiane con coordinate X, Y, Z.

Siano p e p' i piani di E di equazioni

$$p : X + Y - Z = 0, \quad p' : X + Z = 0.$$

(a) Determinare tutte le rette r di E che soddisfano tutte e tre le seguenti condizioni: r passa per il punto $P_0 = P_0(0, 1, 0) \in E$ e r forma un angolo di $\frac{\pi}{3}$ con p e un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con p'.

Sia ora r una retta come in a), o, in caso una retta come in a) non esista, sia r la retta di equazioni $X = 0, Y = 0$.

(b) Calcolare la distanza di r da $p \cap p'$.

(c) Esiste un'isometria f di E tale che

$$(*) \quad f(p) = p' \text{ e } f(r) = r?$$

Se sì, determinare tutte le isometrie che soddisfano $(*)$.

SOLUZIONE:

Osserviamo che i versori normali a p e p' sono, nelle coordinate definite dalla base $\{i, j, k\}$,

$$n_p = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1), \quad n_{p'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1).$$

(a) Sia $v = (l, m, n)$ un versore di direzione di r. Quindi $l^2 + m^2 + n^2 = 1$. Ora

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = sen(\frac{\pi}{3}) =< v, n_p >= \frac{l + m - n}{\sqrt{3}}$$

e

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = sen(\frac{\pi}{4}) =< v, n_{p'} >= \frac{l + n}{\sqrt{2}}$$

da cui abbiamo

$$\begin{cases} l^2 + m^2 + n^2 = 1 \\ l + m - n = \frac{3}{2} \\ l + n = 1 \end{cases}$$

che da

$$\begin{cases} n = 1 - l \\ m = \frac{5}{2} - 2l \\ 6l^2 - 12l + \frac{25}{4} = 0 \end{cases}$$

da cui deduciamo che una tale retta non esiste.

Sia pertanto r la retta di equazioni $X = 0, Y = 0$. Il suo vettore di direzione è allora $v_r = (0, 0, 1)$.

(b) È chiaro che se $O = O(0,0,0)$, allora $O \in r \cap (p \cap p')$ e quindi la distanza di r da $p \cap p'$ è 0.

(c) Sia f un'isometria tale che $f(p) = p'$ e $f(r) = r$ e sia φ è l'operatore unitario associato. È facile vedere che φ manda le giaciture nelle giaciture e quindi

$$\varphi(< n_p >) =< n_{p'} > \text{ e } \varphi(< v_r >) =< v_r > .$$

Pertanto esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che

$$\varphi(n_p) = a n_{p'} \text{ e } \varphi(v_r) = b v_r.$$

Ma φ è unitario, quindi

$$< \varphi(n_p), \varphi(v_r) >=< n_p, v_r >, \|\varphi(n_p)\| = \|n_p\| \text{ e } \|\varphi(v_r)\| = \|v_r\|$$

da cui deduciamo che

$$< a n_{p'}, b v_r >= -\frac{1}{\sqrt{3}}, a^2 = 1 \text{ e } b^2 = 1$$

da cui

$$\frac{ab}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, a^2 = 1 \text{ e } b^2 = 1$$

che si vede subito non avere soluzioni. Se conclude che φ, e quindi f, non esiste. ■