UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE210 - Geometria 2

a.a. 2019-2020

Prima prova di esonero

TESTO

1. Sia K un campo di caratteristica diversa da 2 e sia $k \in K$. Sia V un K-spazio vettoriale e sia $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ una sua base.

(a) Mostrare che esiste un'unica forma bilineare simmetrica $b : V \times V \to K$ tale che, se $q : V \to K$ è la forma quadratica associata, allora si ha

$$q(e_1) = -1, q(e_2) = k, q(e_3) = -k, q(e_1 + e_2) = k - 1, q(e_2 + e_3) = 0$$

e il coefficiente di Fourier di $5e_1 + 2e_3$ rispetto a e_1 è 1.

(b) Sia $K = \mathbb{R}$. Calcolare la matrice di b nella forma canonica di Sylvester.

(c) Sia $K = \mathbb{C}$. Trovare una base diagonalizzante b e scrivere la matrice di b nella forma canonica.

2. Sia $V = M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale euclideo delle matrici 2×2 con prodotto scalare

$$< \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} >= aa' + bb' + cc' + dd'.$$

Sia $k \in \mathbb{R}$, sia $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ e sia $T : V \to V$ l'applicazione lineare definita da $T(A) = BA$ per ogni $A \in M_2(\mathbb{R})$.

(a) Determinare l'operatore aggiunto a T.

(b) Usando un'opportuna base di V, determinare per quali k si ha che T definisce un operatore unitario su V.

(c) Calcolare $\|T(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) \wedge T(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})\|$.

3. Sia E uno spazio euclideo di dimensione 3 e sia $\{O, i, j, k\}$ un suo sistema di coordinate cartesiane con coordinate X, Y, Z.

Siano p e p' i piani di E di equazioni

$$p : X + Y - Z = 0, \quad p' : X + Z = 0.$$

(a) Determinare tutte le rette r di E che soddisfano tutte e tre le seguenti condizioni: r passa per il punto $P_0 = P_0(0,1,0) \in E$ e r forma un angolo di $\frac{\pi}{3}$ con p e un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con p'.

Sia ora r una retta come in a), o, in caso una retta come in a) non esista, sia r la retta di equazioni $X = 0, Y = 0$.

(b) Calcolare la distanza di r da $p \cap p'$.

(c) Esiste un'isometria f di E tale che

$$(*) \quad f(p) = p' \text{ e } f(r) = r?$$

Se sì, determinare tutte le isometrie che soddisfano $(*)$.