UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE210 - Geometria 2

a.a. 2019-2020

Seconda prova di esonero

TESTO E SOLUZIONI

1. Sia $k \in \mathbb{C}$. Sia V uno spazio vettoriale hermitiano e sia $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ una sua base tale che $e' = \{e_1, e_1 + e_2, e_2 + e_3\}$ è una base ortonormale. Sia $T : V \to V$ un operatore lineare tale che

$$T(e_1) = (1 + k)e_1 + ke_2, T(e_2) = -ke_1 + (1 - 2k)e_2, T(e_3) = (1 + 2k)e_1 + 3ke_2 + (1 + k)e_3.$$

(a) Determinare (se esistono) tutti i valori di k per i quali T è un operatore hermitiano.

(b) Per un valore di k trovato in (a) determinare una base ortonormale che diagonalizza T.

(c) Determinare (se esistono) tutti i valori di k per i quali T è un operatore unitario.

SOLUZIONE:

(a) e (c) Come è noto, T è un operatore hermitiano (unitario) se e solo se la sua matrice, in una base ortonormale, è hermitiana (unitaria). Utilizziamo pertanto la base e'. Si ha

$$T(e_1) = (1 + k)e_1 + ke_2 = ae_1 + b(e_1 + e_2) + c(e_2 + e_3) = (a + b)e_1 + (b + c)e_2 + ce_3$$

se e solo se

$$\begin{cases} a + b = 1 + k \\ b + c = k \\ c = 0 \end{cases}$$

che ha soluzione $a = 1, b = k, c = 0$. Pertanto

$$T(e_1) = 1e_1 + k(e_1 + e_2) + 0(e_2 + e_3).$$

Inoltre

$$T(e_1 + e_2) = e_1 + (1 - k)e_2 = ae_1 + b(e_1 + e_2) + c(e_2 + e_3) = (a + b)e_1 + (b + c)e_2 + ce_3$$

se e solo se

$$\begin{cases} a+b=1 \\ b+c=1-k \\ c=0 \end{cases}$$

che ha soluzione $a=k, b=1-k, c=0$. Pertanto

$$T(e_1+e_2)=ke_1+(1-k)(e_1+e_2)+0(e_2+e_3).$$

Infine

$$T(e_2+e_3)=(1+k)e_1+(1+k)e_2+(1+k)e_3=ae_1+b(e_1+e_2)+c(e_2+e_3)=(a+b)e_1+(b+c)e_2+ce_3$$

se e solo se

$$\begin{cases} a+b=1+k \\ b+c=1+k \\ c=1+k \end{cases}$$

che ha soluzione $a=1+k, b=0, c=1+k$. Pertanto

$$T(e_2+e_3)=(1+k)e_1+0(e_1+e_2)+(1+k)(e_2+e_3).$$

Ne segue che

$$M_{e'}(T)=\begin{pmatrix} 1 & k & 1+k \\ k & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 1+k \end{pmatrix}.$$

Ora $M_{e'}(T)$ è hermitiana se e solo se ${}^t\overline{M_{e'}(T)}=M_{e'}(T)$, ovvero se e solo se

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{k} & 0 \\ \overline{k} & 1-\overline{k} & 0 \\ 1+\overline{k} & 0 & 1+\overline{k} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & k & 1+k \\ k & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 1+k \end{pmatrix}$$

ovvero se e solo se $\overline{k}=k, 0=1+k, 1-\overline{k}=1-k, 1+\overline{k}=0, 1+\overline{k}=1+k$, cioè se e solo se $k=-1$. Se ne deduce che T è un operatore hermitiano se e solo se $k=-1$.
Invece $M_{e'}(T)$ è unitaria se e solo se ${}^t\overline{M_{e'}(T)}M_{e'}(T)=I_3$, ovvero se e solo se

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{k} & 0 \\ \overline{k} & 1-\overline{k} & 0 \\ 1+\overline{k} & 0 & 1+\overline{k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k & 1+k \\ k & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 1+k \end{pmatrix}=I_3.$$

Questo però implica, per esempio, che il prodotto tra la prima riga e la terza colonna è 0, ovvero che $1+k=0$. Ma se ciò accade si ha che $M_{e'}(T)$ ha determinate nullo, quindi non può essere unitaria. Se ne deduce che non esistono valori di k per i quali T è un operatore unitario.

(b) Posto allora $k = -1$ si ha

$$M_{e'}(T) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e il suo polinomio caratteristico è

$$P_T(s) = \begin{vmatrix} 1-s & -1 & 0 \\ -1 & 2-s & 0 \\ 0 & 0 & -s \end{vmatrix} = -s(s^2 - 3s + 1)$$

e quindi gli autovalori di T sono $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \lambda_3 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. I corrrispondenti autovettori sono dati dalle soluzioni dei sistemi

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_i & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

per $i = 1, 2, 3$, ovvero dei sistemi

$$\begin{cases} (1-\lambda_i)x - y = 0 \\ -x + (2-\lambda_i)y = 0 \\ -\lambda_i z = 0 \end{cases}$$

che ha soluzioni $x = y = 0, z = 1$ per $i = 1$, $x = 1, y = 1 - \lambda_i, z = 0$ per $i = 2, 3$. Pertanto gli autovettori, ricordando che siamo nella base e', sono

$$v_1 = e_2 + e_3, v_2 = e_1 + (1-\lambda_2)(e_1 + e_2), v_3 = e_1 + (1-\lambda_3)(e_1 + e_2).$$

Dato che e' è una base ortonormale si verifica subito che $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base ortogonale che diagonalizza T e quindi

$$\{v_1, \frac{1}{\sqrt{1+(1-\lambda_2)^2}} v_2, \frac{1}{\sqrt{1+(1-\lambda_3)^2}} v_3\}$$

è una base ortonormale che diagonalizza T. ■

2. Sia K un campo e sia $k \in K$. In $\mathbb{P}^3_K$ con coordinate omogenee $X_0, \dots, X_3$, consideriamo le seguenti rette :

$$r : \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 + X_3 = 0 \end{cases}, s : \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \end{cases}$$

ed i seguenti piani

$$p : X_1 + X_2 + X_3 = 0, q_k : X_1 + X_2 + kX_3 = 0.$$

(a) Determinare $L(r, p)$ e $L(s, q_k)$.

(b) Determinare per quali k esiste una proiettività di $\mathbb{P}^3_K$ che manda r in s e p in q_k.

(c) Determinare per quali k esistono $P_1 \in r, P_2 \in s, P_3 \in p, P_4 \in q_k$ tali che P_1, P_2, P_3, P_4 non sono in posizione generale.

SOLUZIONE:

(a) Si ha $r \subset p$ e quindi, ovviamente, $L(r, p) = p$. Si ha

$$s \cap q_k : \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \\ X_1 + X_2 + kX_3 = 0 \end{cases}$$

quindi, se $k \neq 0$, $s \cap q_k = \{[1, 0, 0, 0]\}$ è un punto mentre se $k = 0$ si ha che $s \subset q_0$ da cui $L(s, q_0) = q_0$. Se $k \neq 0$ si ha, per la formula di Grassmann,

$$\dim L(s, q_k) = \dim s + \dim q_k - \dim s \cap q_k = 3$$

e quindi $L(s, q_k) = \mathbb{P}^3_K$.

(b) Se esiste una proiettività f di $\mathbb{P}^3_K$ che manda r in s e p in q_k, allora

$$s = f(r) \subset f(p) = q_k$$

e quindi $k = 0$. In tal caso f esiste. Per esempio consideriamo la proiettività f data da

$$\begin{cases} X'_0 = X_0 \\ X'_1 = X_1 \\ X'_2 = X_2 + X_3 \\ X'_3 = X_3 \end{cases}$$

la cui matrice associata $A \in GL_4(K)$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Allora

$$\begin{cases} X_0 = X'_0 \\ X_1 = X'_1 \\ X_2 = X'_2 - X'_3 \\ X_3 = X'_3 \end{cases}$$

e quindi $f(r) = s$ e $f(p) = q_0$. Si conclude che f esiste se e solo se $k = 0$.
(c) Siano $P_1 = [0, 0, 1, -1], P_2 = [0, 0, 0, 1], P_3 = [1, 0, 1, -1], P_4 = [1, 0, 0, 0]$. Si verifica immediatamente che tali punti non sono in posizione generale per ogni k. ■

3. Siano $k, h \in \mathbb{R}$ e siano $\mathcal{C}_k$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$X^2 - kY^2 - 2kX - 2kY + k^2 - k - 1 = 0$$

e $\mathcal{D}_h$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$X^2 + \frac{Y^2}{2} + 2hX = 0.$$

(a) Determinare per quali k, h si ha che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono non degeneri, semplicemente degeneri o doppiamente degeneri e il tipo di conica.
(b) Determinare i valori k ed h per cui $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono affinemente equivalenti (nel caso affine).
(c) Determinare i valori k ed h per cui $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono congruenti (nel caso euclideo).

SOLUZIONE:

(a) La matrice di $\mathcal{C}_k$ è

$$A = \begin{pmatrix} k^2 - k - 1 & -k & -k \\ -k & 1 & 0 \\ -k & 0 & -k \end{pmatrix}$$

e si ha $\det(A) = k$. Se $k = 0$ si vede subito che A ha rango 2, pertanto

$$\mathcal{C}_k \text{ è: non degenere se } \ k \neq 0, \text{ semplicemente degenere se } \ k = 0.$$

Invece

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}$$

e si ha $\det(A_0) = -k$ quindi

$$\mathcal{C}_k \text{ è: un'ellisse se } k < 0, \text{ una parabola se } k = 0, \text{ un'iperbole se } k > 0.$$

La matrice di $\mathcal{D}_h$ è

$$B = \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ h & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e si ha $\det(B) = -\frac{h^2}{2}$ e pertanto

$$\mathcal{D}_h \text{ è: non degenere se } h \neq 0, \text{ semplicemente degenere se } \ h = 0.$$

Inoltre

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e si ha $\det(B_0) = \frac{1}{2} > 0$ per ogni h e pertanto

$$\mathcal{D}_h \text{ è un'elllisse per ogni } h.$$

(b) e (c) Con l'isometria

$$\begin{cases} X = X' + k \\ Y = Y' - 1 \end{cases}$$

l'equazione di $\mathcal{C}_k$ diventa (rinominando X' e Y' con X e Y)

$$X^2 - kY^2 = 1$$

da cui l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}_k$ è:

(caso 1): $k > 0$

$$X^2 - \frac{Y^2}{(\frac{1}{\sqrt{k}})^2} = 1;$$

(caso 2): $k = 0$

Scambiando X e Y si ottiene

$$Y^2 = 1;$$

(caso 3): $-1 \leq k < 0$

Scambiando X e Y si ottiene

$$\frac{X^2}{(\frac{1}{\sqrt{-k}})^2} + Y^2 = 1;$$

(caso 4): $k < -1$

$$X^2 + \frac{Y^2}{(\frac{1}{\sqrt{-k}})^2} = 1.$$

Nel caso affine deduciamo ulteriormente che l'equazione canonica affine di $\mathcal{C}_k$ è:

$$(*) \ X^2 - Y^2 = 1 \text{ se } k > 0; Y^2 = 1 \text{ se } k = 0; X^2 + Y^2 = 1 \text{ se } k < 0.$$

Con l'isometria

$$\begin{cases} X = X' - h \\ Y = Y' \end{cases}$$

l'equazione di $\mathcal{D}_h$ diventa (rinominando X' e Y' con X e Y)

$$X^2 + \frac{Y^2}{2} = h^2$$

da cui l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{D}_h$ è:

(caso 1'): $h \neq 0$

Scambiando X e Y si ottiene

$$\frac{X^2}{(\sqrt{2}|h|)^2} + \frac{Y^2}{(|h|)^2} = 1;$$

(caso 2'): $h = 0$

Scambiando X e Y si ottiene

$$\frac{X^2}{(\sqrt{2})^2} + Y^2 = 0.$$

Nel caso affine deduciamo ulteriormente che l'equazione canonica affine di $\mathcal{D}_h$ è:

$$(**)\ X^2 + Y^2 = 1 \text{ se } h \neq 0; X^2 + Y^2 = 0 \text{ se } h = 0.$$

Pertanto, da $(*)$ e $(**)$ si ha che

$$\mathcal{C}_k \text{ e } \mathcal{D}_h \text{ sono affinemente equivalenti se e solo se } k < 0 \text{ e } h \neq 0.$$

Affinchè $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ siano congruenti, si vede che l'unica possibilià è che siamo nei casi 3 o 4 per $\mathcal{C}_k$ e $1'$ per $\mathcal{D}_h$. Nel caso 3 si deve avere

$$\frac{1}{\sqrt{-k}} = \sqrt{2}|h| \text{ e } 1 = |h|$$

ovvero $k = -\frac{1}{2}, h = \pm 1$ (che rientra nei casi 3 e $1'$). Nel caso 4 si deve avere

$$1 = \sqrt{2}|h| \text{ e } \frac{1}{\sqrt{-k}} = |h|$$

ovvero $k = -2, h = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ (che rientra nei casi 4 e $1'$).

Si conclude che

$$\mathcal{C}_k \text{ e } \mathcal{D}_h \text{ sono congruenti se e solo se } k = -\frac{1}{2}, h = \pm 1 \text{ oppure } k = -2, h = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}. \blacksquare$$