UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE210 - Geometria 2

a.a. 2019-2020

Seconda prova di esonero

TESTO

1. Sia $k \in \mathbb{C}$. Sia V uno spazio vettoriale hermitiano e sia $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ una sua base tale che $e' = \{e_1, e_1 + e_2, e_2 + e_3\}$ è una base ortonormale. Sia $T : V \to V$ un operatore lineare tale che

$$T(e_1) = (1+k)e_1 + ke_2, T(e_2) = -ke_1 + (1-2k)e_2, T(e_3) = (1+2k)e_1 + 3ke_2 + (1+k)e_3.$$

(a) Determinare (se esistono) tutti i valori di k per i quali T è un operatore hermitiano.

(b) Per un valore di k trovato in (a) determinare una base ortonormale che diagonalizza T.

(c) Determinare (se esistono) tutti i valori di k per i quali T è un operatore unitario.

2. Sia K un campo e sia $k \in K$. In $\mathbb{P}^3_K$ con coordinate omogenee $X_0, \ldots, X_3$, consideriamo le seguenti rette :

$$r : \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 + X_3 = 0 \end{cases}, s : \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \end{cases}$$

ed i seguenti piani

$$p : X_1 + X_2 + X_3 = 0, q_k : X_1 + X_2 + kX_3 = 0.$$

(a) Determinare $L(r, p)$ e $L(s, q_k)$.

(b) Determinare per quali k esiste una proiettività di $\mathbb{P}^3_K$ che manda r in s e p in q_k.

(c) Determinare per quali k esistono $P_1 \in r, P_2 \in s, P_3 \in p, P_4 \in q_k$ tali che P_1, P_2, P_3, P_4 non sono in posizione generale.

3. Siano $k, h \in \mathbb{R}$ e siano $\mathcal{C}_k$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$X^2 - kY^2 - 2kX - 2kY + k^2 - k - 1 = 0$$

e $\mathcal{D}_h$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$X^2 + \frac{Y^2}{2} + 2hX = 0.$$

(a) Determinare per quali k, h si ha che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono non degeneri, semplicemente degeneri o doppiamente degeneri e il tipo di conica.
(b) Determinare i valori k ed h per cui $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono affinemente equivalenti (nel caso affine).
(c) Determinare i valori k ed h per cui $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono congruenti (nel caso euclideo).