Undicesimo Tutorato GE210

19 dicembre 2019

A.A. 2019/2020

Docente: Angelo Felice Lopez

Tutori: Giovanni Passeri, Myrla Barbosa

Esercizio 1. *Stabilire se le seguenti curve di $\mathbb{E}^2$ sono simmetriche rispetto ad uno dei due assi coordinati e se sì, dire quale:*

$$x^2 + yx^4 + y^2x^6 + 2 = 0; \qquad x^3 - y^2x - y^4x^5 + 3x = 0;$$
$$y^2x = 1; \qquad xy - 1 = 0.$$

Esercizio 2. *Determinare chiusura proiettiva e punti impropri delle seguenti curve di $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$:*

$$x^2 - 2y - 3 = 0; \qquad x^2y + 3x = 0; \qquad x^2 + y^2 + 1 = 0;$$
$$x^2y - xy^2 + y^2 = x; \qquad x^2y^2 = 3.$$

Esercizio 3. *Verificare che le seguenti coniche di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ sono degeneri e determinare le equazioni cartesiane delle rette in cui si scompongono*

$$x^2 - y^2 + 2x - 2y = 0; \qquad x^2 + y^2 + 2xy + \tfrac{3}{2}x + \tfrac{3}{2}y - 1 = 0;$$
$$3x^2 - \sqrt{2}y^2 + (3\sqrt{2} - 1)xy = 0; \qquad 2x^2 + 2y^2 + 4xy = 0.$$

Esercizio 4. *Classificare le seguenti coniche di $\mathbb{P}^2(k)$ determinandone rango e forma canonica con $k = \mathbb{C}, \mathbb{R}$.*

1. $x_0^2 + 4x_0x_1 - 2x_0x_2 + x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 0$;
2. $2x_0^2 - 2x_0x_1 + 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 = 0$;
3. $x_0^2 + 4x_0x_1 + 2x_0x_2 + 5x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_2^2 = 0$;
4. $2x_0^2 + 5x_0x_1 + 3x_0x_2 - 3x_1^2 - 3x_1x_2 - 2x_2^2 = 0$.

Esercizio 5. *Dimostrare che una circonferenza ha ogni retta contenente i suo centro come asse di simmetria.*

Esercizio 6. *Sia $\mathcal{C}$ una conica a centro di $\mathbb{A}^2(k)$ di equazione $f(x, y) = 0$ e $C = (x_0, y_0)$ il suo centro (si dimostra che ogni conica a centro ammette un unico punto di $\mathbb{A}^2(k)$ rispetto a cui è simmetrica, detto "centro"). Dimostrare che*

1. *Le coordinate x_0 ed y_0 del centro sono individuate dalle condizione di annullare entrambe le derivate parziali f_x, f_y di f.*
2. *$C = (0, 0)$ se e solo se f non contiene termini di primo grado.*
3. *Dedurre che la traslazion ex $= x' - x_0$ e $y = y' - y_0$ trasforma $\mathcal{C}$ in una conica la cui equazione è priva dei termini di primo grado.*