Primo Tutorato GE210

1 ottobre 2019
A.A. 2019/2020
Docente: Angelo Felice Lopez
Tutori: Giovanni Passeri, Myrla Barbosa

Esercizio 1. *Dire quale $b : V \times V \to \mathbb{R}$ è una forma bilineare (se non diversamente indicato V è uno spazio vettoriale reale di dimensione n ed $v, w \in V$ sono vettori di coordinate $(x_1, \dots, x_n)$ e $(y_1, \dots, y_n)$ rispettivamente).*

1. $b(v, w) = \sum_{j=1}^{n} x_j |y_j|$
2. $b(v, w) = |\sum_{j=1}^{n} x_j y_j|$
3. $b(v, w) = (\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{j=1}^{n} y_j)$
4. $b(v, w) = \sum_{j=1}^{n}(x_j + y_j) - \sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \sum_{j=1}^{n} y_j^2$
5. $V = C(\mathbb{R})$, $b(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

Esercizio 2. *In ciascuno dei seguenti casi determinare la forma bilineare polare della forma quadratica $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:*

1. $q(x, y, z) = 10x^2 + 3xy + 4z^2 + 5y^2$
2. $q(x, y, z) = x^2 - 2xz - y^2 - z^2$
3. $q(x, y, z) = 5x^2 + 3y^2 + xz$
4. $q(x, y, z) = -x^2 - 6xy + 5y^2 + 4z^2$.

Determinare poi matrice e rango di ciascuna.

Esercizio 3. *Sia V uno spazio vettoriale finito $f, g \in V^\vee$ due funzionali lineari. Consideriamo la forma bilineare su V, $b(u, v) = f(u)g(v) - f(v)g(u)$. Controllare che b è antisimmetrica. Mostrare che b è banale se e solo se uno dei funzionali è multiplo dell'altro.*

Esercizio 4. *Sia V uno spazio vettoriale reale finito. Verificare che $b : V \times V \to \mathbb{R}, (v_1, v_2) \mapsto 2x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2y_1y_2$ (dove $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$) è una forma bilineare e trovare i vettori isotropi.*

Esercizio 5. *Sia V uno spazio vettoriale reale finito ed $\boldsymbol{e}$ una base fissata. b la forma bilineare su V associata alla matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$. Sia poi $v_0 \in V$. Mostrare che $v_0^\perp = V$ se e solo se $v_0 \in \ker T$, dove $T : V \to V$ è l'applicazione lineare associata ad M rispetto ad $\boldsymbol{e}$.*