Secondo Tutorato GE210

8 ottobre 2019
A.A. 2019/2020
Docente: Angelo Felice Lopez
Tutori: Giovanni Passeri, Myrla Barbosa

Esercizio 1. *In ciascuno dei seguenti casi determinare una base rispetto alla quale la forma quadratica assegnata su* $\mathbb{C}^2$ *assuma la forma canonica*

$$D = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0}_1 \\ \boldsymbol{0}_2 & \boldsymbol{0}_3 \end{pmatrix}$$

e la relativa formula di cambiamento di coordinate.

1. $ix^2 - 2y^2$
2. $36x^2 - 121y^2$

Esercizio 2. *In ciascuno dei seguenti casi determinare una base rispetto alla quale la forma quadratica assegnata su* $\mathbb{C}^2$ *assuma la forma canonica*

$$D = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_p & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I}_{r-p} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

e calcolarne la relativa segnatura:

1. $4x^2 - 5y^2 + 12z^2$
2. $y^2 + 16z^2$

Esercizio 3. *Si consideri la forma quadratica* $Q : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *tale che:*

$$Q\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} := (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_4)^2$$

1. *Trovare una base di* $M_2(\mathbb{R})$ *diagonalizzante per per* Q*, scrivere l'espressione di* Q *rispetto a tale base, quindi determinarne rango e segnatura.*
2. *Provare che ogni base diagonalizzante per* Q *contiene esattamente una matrice della forma*
$$\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$$
con $a \neq 0$.

Esercizio 4. *Sia* V *uno spazio vettoriale ed* $U \subset W$ *due suoi sottospazi. Sia* $b : V \times V \to \mathbb{R}$ *una forma bilineare. Mostrare che* $U^\perp \supset W^\perp$.

Esercizio 5. *Considerare lo spazio vettoriale* $V = M_n(\mathbb{R})$ *con la forma bilineare* $b : V \times V \to \mathbb{R}$, $(A, B) \mapsto \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}$, *dove* $A = (a_{ij})$ *e* $B = (b_{ij})$. *Verificare che* b *è un prodotto scalare su* V, *che d'ora in poi denoteremo* $\langle -, - \rangle$. *Dimostrare poi che il sottospazio delle matrici antisimmetriche è ortogonale a quello delle matrici simmetriche, rispetto a* $\langle -, - \rangle$.

Esercizio 6. *Sia* V *uno spazio vettoriale munito di un prodotto scalare* $\langle -, - \rangle$. *Mostrare che dati* $u, v \in V$, *vale che* $||u||v + ||v||u$ *e* $||u||v - ||v|u$ *sono ortogonali.*

Esercizio 7. *Sia* V *uno spazio vettoriale munito di un prodotto scalare* $\langle -, - \rangle$ *ed* $u, v \in V$. *Mostrare che se* $||u|| = ||v|| = 1$ *e* $\langle u, v \rangle = 1$, *allora* $u = v$.