# Terzo Tutorato GE210

15 ottobre 2019

A.A. 2019/2020

Docente: Angelo Felice Lopez

Tutori: Giovanni Passeri, Myrla Barbosa

**Esercizio 1.**

1. *Applicare il procedimento di Gram Schmidt a* $(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)$ *in* $\mathbb{R}^3$.

2. *Consideriamo lo spazio vettoriale reale* $V = \{a\cos x + b\sin x \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subset C^\infty([0,\pi])$. *Verificare che la funzione* $V \times V \to \mathbb{R}$, $(f,g) \mapsto \int_0^\pi f(x)g(x)dx$ *è un prodotto scalare su* $V$ *che denoteremo* $\langle -, - \rangle$. *Mostrare che* $\cos x + \sin x$ *e* $2\cos x + \sin x$ *sono una base per* $V$ *ed applicarvi il prodimento di Gram Schmidt.*

3. *Consideriamo* $V = M_2(\mathbb{R})$ *e fissiamovi la base canonica ed il prodotto scalare standard. Verificare che i vettori*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

*costituiiscono una base di* $V$ *ed applicarvi il procedimento di Gram-Schmidt.*

**Esercizio 2.** *Utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt ortogonalizzare la base canonica di* $\mathbb{R}^4$ *rispetto al prodotto scalare*

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_1y_1 + x_3y_3 + x_3y_4 + x_4y_3 + 2x_4y_4$$

**Esercizio 3.**

1. *Scrivere le equazioni cartesiane e parametriche della retta in* $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ *parallella alla retta di equazioni cartesiane* $x - y + 2 = 0$ *e passante per* $(1,0)$.

2. *Esibire una retta in* $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ *passante per* $(1,0,0)$ *e parallela al piano di equazioni cartesiane* $x + y + z = 0$. *Dire se è unica.*

**Esercizio 4.** *Scrivere l'equazione cartesiana del piano in* $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ *passante per i punto* $(1,0,0),(-1,1,0),(0,3,2)$.

**Esercizio 5.** *Mostrare che date due rette non coincidenti in* $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ *che si intersecano, esiste un unico piano che le contiene. Scrivere poi l'equazione del piano di* $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ *contenente le rette di equazioni parametriche*

$$r : \begin{cases} x = t + 3 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 1 \\ z = t - 1 \end{cases}$$

**Esercizio 6.** *Mostrare che dato un punto* $P \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ *e due rette non parallele* $r, s$ *esiste un unico piano per* $P$ *e parallelo ad* $r, s$. *Scrivere le equazioni cartesiane di tali piano nel caso* $P = (0, 0, 1)$ *ed*

$$r : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x - y = 0 \\ z - x = 1 \end{cases}$$

**Esercizio 7.** *Sia* $V$ *un* $\mathbb{R}$*-spazio vettoriale di dimensione* 3 *e fissiamo su di esso una base. Siano poi* $u, v \in V$ *linearmente indipendenti. Mostrare che* $V = \langle u, v\rangle \oplus \langle u \wedge v\rangle$.

**Esercizio 8.** *Sotto le ipotesi dell'esercizio precedente, sia* $v = \{v_1, v_2, v_3\}$ *una base e definiamo* $u_1 = v_2 \wedge v_3$, $u_2 = v_2$ *e* $u_3 = u_1 \wedge u_2$.*Verificare che* $u = \{u_1, u_2, u_3\}$ *è una base ortogonale di* $V$. *Mostrare poi che se* $v$ *è ortogonale, ogni vettore di* $u$ *è multiplo di uno in* $v$.

**Esercizio 9.** *Consideriamo* $\mathbb{R}^3$ *munito del prodotto scalare standard, con base canonica* $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. *Sia* $v \in \mathbb{R}^3$ *tale che* $v \perp \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$, $||v||^2 = 3$ *e, detto* $\theta$ *l'angolo fra* $v$ *e* $\boldsymbol{j}$, $\theta > 0$. *Scrivere esplicitamente le coordinate di* $v$ *rispetto a* $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.

**Esercizio 10.** *Dire quale delle affermazioni sono vere e quali false. Siano* $v, w \in \mathbb{R}^3$ *col prodotto scalare standard.*

1. $\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}(||v + w||^2 - ||v - w||^2)$

2. $\langle v, v \wedge w\rangle = 0$

3. $v \wedge (v \wedge w) = 0$

**Esercizio 11.** *Sotto le ipotesi dell'esercizio 7, siano* $G_1$ *e* $G_1$ *gli insiemi dei sottospazi vettoriali di* $V$ *di dimensioni rispettivamente* 1 *e* 2. *Consideriamo la seguente applicazione* $G_2 \to G_1$, *costruita come segue: per ogni* $W \in G_2$, *sia* $w_1, w_2$ *una sua base, mappiamo allora* $W \mapsto \langle w_1 \wedge w_2\rangle$. *Verificare che tale applicazione è ben definita e che stabilisce una corrispondenza biunivoca fra* $G_2$ *e* $G_1$.