SestoTutorato GE210

7 novembre 2019

A.A. 2019/2020

Docente: Angelo Felice Lopez

Tutori: Giovanni Passeri, Myrla Barbosa

Esercizio 1. *Siano $k \in \mathbb{R}$ e V uno spazio vettoriale reale ed $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ una sua base.*

1. *Mostrare che esiste un'unica forma bilineare simmetrica $b : V \times V \to \mathbb{R}$ tale che*

   $$b(e_1, e_1) = k,\ b(e_3, e_3) = -k,\ b(e_1, e_3) = -k,\ b(e_2, e_2) = 1,\ b(e_2, e_3) = -1$$

   e che e_1 è perpendicolare ad $e_1 - e_2$ rispetto a b.

2. *Calcolare la matrice di b nella forma canonica di Sylvester.*

3. *Sia $k = 1$. Sia $F : V \to V$ un operatore tale che $M_e(F) = M_e(b)$ ed $b(F(v), w) = b(v, w)$ per ogni $v, w \in V$. Mostrare che ogni autovettore di F è isotropo rispetto a b.*

4. *Determinare i valori di k per i quali b definisce un prodotto scalare su V e calcolare l'angolo tra e_1 ed $e_1 + e_3$ ed il prodotto vettoriale $e_2 \wedge \left(\frac{1}{\sqrt{-1-k}}(e_2 + e_3) \right)$*

Esercizio 2. *Sia $k \in \mathbb{R}$ tale che $k > 0$ e $k \neq 1/4$ e sia $b_k : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica avente come matrice associata*

$$A_k = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & k \\ 0 & k & 0 \\ k & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica $\{E_1, E_2, E_3\}$ di $\mathbb{R}^3$.

1. *Determinare la forma canonica di Sylvester di b_k.*

2. *Determinare una matrice $M \in SO(3)$ che diagonalizza b_k.*

3. *Determianre i valori di k per i quali b_k definisce un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$.*

4. *Per i valori di k trovati in 3. calcolare l'angolo tra E_1 ed E_2 e il prodotto vettoriale $E_1 \wedge E_2$.*

Esercizio 3. *Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ consideriamo la retta r ed il piano p di equazioni*

$$r : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t - 1 \\ z = -t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}; \quad p : x + y + z = 1$$

1. *Determinare le equazioni di tutti i piani* p' *in* $\mathbb{E}^3$ *tali che la distanza di* p' *da* r *è* 2.

2. *Determinare le equazioni di tutte le rette* s *in* $\mathbb{E}^3$ *tali che l'angolo fra* s *ed* r *e l'angolo fra* s *e* p *è* $\pi/6$.