

Settimo Tutorato GE210

21 NOVEMBRE 2019

A.A. 2019/2020

DOCENTE: ANGELO FELICE LOPEZ

TUTORI: GIOVANNI PASSERI, MYRLA BARBOSA

Esercizio 1. *Stabilire quale delle seguenti sono forme hermitiane su \mathbb{C}^2 :*

1. $\langle x, y \rangle = x_1 \bar{y}_1 + ix_1 \bar{y}_2 + ix_2 \bar{y}_1$;

2. $\langle x, y \rangle = i|x_1||y_1|$;

3. $\langle x, y \rangle = x_1 \bar{y}_1 + 2ix_1 \bar{y}_2 - 2ix_2 \bar{y}_1$;

4. $\langle x, y \rangle = 1 + x_1 \bar{y}_1 + x_1 \bar{y}_2$;

5. $\langle x, y \rangle = x_1 \bar{y}_1 + 2x_2 \bar{y}_2$.

Esercizio 2. *Stabilire quali delle seguenti matrici sono hermitiane:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} i & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & 2 & 1+i \\ -i & 1-i & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} i & 1 & i \\ -1 & 2 & 2i \\ -1 & -2i & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. *Si verifichi che l'insieme $\{(i, -1, 0, i), (0, i, i, i), (1, i, 0, i), (-i, 0, 1, 0)\}$ è una base di \mathbb{C}^4 e lo si ortonormalizzi rispetto al prodotto hermitiano standard.*

Esercizio 4. *Sia V uno spazio vettoriale finito su \mathbb{C} munito di un prodotto hermitiano. Sia $A : V \rightarrow V$ un operatore hermitiano. Diciamo che A è "definito positivo" se per ogni $v \in V$, $\langle Av, v \rangle > 0$ e "semipositivo" se $\langle Av, v \rangle \geq 0$ per ogni $v \in V$. Mostrare che:*

1. *Se A è definito positivo, ogni suo autovalore è positivo;*
2. *Esiste un'applicazione lineare $B : V \rightarrow V$ tale che $B^2 = A$ e $BA = AB$.*

Esercizio 5. *Sia $A : V \rightarrow V$ un operatore hermitiano. Mostrare che esistono operatori hermitiani semipositivi $P_1, P_2 : V \rightarrow V$ tali che $A = P_1 - P_2$.*

Esercizio 6. *Sia V uno spazio vettoriale complesso finito. Mostrare che se $T : V \rightarrow V$ è un operatore lineare che ammette una base ortonormale di autovettori allora T è normale, i.e.: $TT^* = T^*T$, dove T^* è l'operatore aggiunto di T .*