**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE**

**Corso di Laurea in Matematica**

**GE210 - Geometria 2**

**a.a. 2021-2022**

**Prova scritta del 14-9-2022**

**TESTO E SOLUZIONI**

**1.** Siano $k, h \in \mathbb{R}$ e sia $V$ uno spazio vettoriale euclideo con base ortonormale $e = \{e_1, e_2, e_3\}$. Sia $T : V \to V$ un operatore lineare tale che

$T(e_1) = 2e_1 + ke_2 + he_3, T(e_1 + e_3) = 2e_1 + (k+1)e_2 + (h+2)e_3, T(e_2) = ke_1 + he_2 + e_3.$

(a) Determinare tutti i valori di $k, h$ per i quali $T$ è un operatore simmetrico.
(b) Per tutti i valori di $k, h$ trovati in (a), determinare una matrice $M \in O(3)$ che diagonalizza $T$.
(c) Determinare tutti i valori di $k, h$ per i quali $T$ è un operatore unitario.

**SOLUZIONE:**

(a) Come è noto, $T$ è un operatore simmetrico se e solo se la sua matrice, in una base ortonormale, è simmetrica. Utilizziamo pertanto la base $e$. Si ha

$$T(e_3) = T(e_1 + e_3) - T(e_1) = e_2 + 2e_3$$

da cui

$$M_e(T) = \begin{pmatrix} 2 & k & 0 \\ k & h & 1 \\ h & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

che è simmetrica se e solo se $h = 0$.

(b) Posto allora $h = 0$ il polinomio caratteristico di $T$ è

$$P_T(t) = \begin{vmatrix} 2-t & k & 0 \\ k & -t & 1 \\ 0 & 1 & 2-t \end{vmatrix} = (2-t)[t^2 - 2t - 1 - k^2]$$

e quindi gli autovalori di $T$ sono $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1 - \sqrt{k^2+2}, \lambda_3 = 1 + \sqrt{k^2+2}$. I corrrispondenti autovettori sono dati dalle soluzioni dei sistemi

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_i & k & 0 \\ k & -\lambda_i & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

per $i = 1, 2, 3$, ovvero dei sistemi

$$\begin{cases} (2-\lambda_i)x + ky = 0 \\ kx - \lambda_i y + z = 0 \\ y + (2-\lambda_i)z = 0 \end{cases}$$

che ha soluzioni $x = 1, y = 0, z = -k$ per $i = 1$, $x = k, y = \lambda_i - 2, z = 1$ per $i = 2, 3$. Pertanto gli autovettori normalizzati, messi in colonna, danno la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} & \frac{k}{\sqrt{1+k^2+(\lambda_2-2)^2}} & \frac{k}{\sqrt{1+k^2+(\lambda_3-2)^2}} \\ 0 & \frac{\lambda_2-2}{\sqrt{1+k^2+(\lambda_2-2)^2}} & \frac{\lambda_3-2}{\sqrt{1+k^2+(\lambda_3-2)^2}} \\ -\frac{k}{\sqrt{1+k^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+k^2+(\lambda_2-2)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+k^2+(\lambda_3-2)^2}} \end{pmatrix}.$$

che diagonalizza $T$.

(c) Dato che $e$ è ortonormale, dobbiamo solo verificare se $M_e(T)$ è ortogonale. Ma si verifica subito che non lo è, in quanto, per esempio, $2^2 + k^2 + 0^2 \neq 1$ per ogni $k$. Quindi non ci sono valori di $k, h$ per i quali $T$ è un operatore unitario. ■

**2.** Sia $k \in \mathbb{R}$. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}^3$ consideriamo le rette di equazioni

$$r : \begin{cases} X + Y + Z + 1 = 0 \\ X - Y = 0 \end{cases}, \quad s_k : \begin{cases} X + Y + kZ = 0 \\ Y - Z = 0 \end{cases}.$$

(a) Determinare le equazioni di tutti i piani $p$ tali che $d(p, r) \neq 0, d(p, s_k) \neq 0$.

(b) Determinare se esiste un piano $p'$ che ha angolo $\frac{\pi}{4}$ sia con $r$ che con $s_k$.

(c) Considerato $\mathbb{E}^3 \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, determinare le equazioni della chiusura proiettiva $\overline{r}$ di $r$ e $\overline{s}_k$ di $s_k$. Inoltre, scelto un punto $P \in \overline{s}_k$, trovare l'equazione di un piano $p'' \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ passante per $P$ e contenente $\overline{r}$.

**SOLUZIONE:**

(a) Affinchè $d(p, r) \neq 0, d(p, s_k) \neq 0$, dovremmo avere che $p$ è parallelo a $r$ e $s_k$ e non le contiene. Ora i vettori di direzione di $r$ e $s_k$ sono $v_r = (1, 1, -2)$ e $v_{s_k} = (-1-k, 1, 1)$. Dato che non sono paralleli, ne segue che la giacitura di $p$ è $< v_r, v_{s_k} >$ e quindi un vettore normale a $p$ è

$$v_r \wedge v_{s_k} = (3, 1 + 2k, 2 + k)$$

e pertanto l'equazione di $p$ è $3X + (1 + 2k)Y + (2 + k)Z + D = 0$.

Ora vediamo per quali $D$ si ha che $p$ non contiene le due rette.

Le equazioni parametriche di $r$ sono

$$r : \begin{cases} X = t \\ Y = t \\ Z = -1 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

e sostituendo nell'equazione di $p$ otteniamo $-2-k+D$, da cui $D \neq 2+k$. Le equazioni parametriche di $s_k$ sono

$$s_k : \begin{cases} X = -(1+k)t \\ Y = t \\ Z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

e sostituendo nell'equazione di $p$ otteniamo $D$, da cui $D \neq 0$. Ne concludiamo che i piani $p$ tali che $d(p,r) \neq 0, d(p,s_k) \neq 0$ sono tutti quelli di equazioni

$$3X + (1+2k)Y + (2+k)Z + D = 0 \text{ con } D \neq 0, 2+k.$$

(b) Sia $AX+BY+CZ+D = 0$ l'equazione di $p'$, in cui possiamo supporre $A^2+B^2+C^2 = 1$. Si ha

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = sen(\frac{\pi}{4}) = \frac{< v_r, n_p >}{||v_r||||n_p||} = \frac{A+B-2C}{\sqrt{6}}$$

e

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = sen(\frac{\pi}{4}) = \frac{< v_{s_k}, n_p >}{||v_{s_k}||||n_p||} = \frac{-(1+k)A+B+C}{\sqrt{k^2+2k+3}}$$

da cui deduciamo

$$\begin{cases} A+B-2C = \sqrt{3} \\ -(1+k)A+B+C = \sqrt{\frac{k^2+2k+3}{2}} \end{cases}$$

e risolvendo troviamo

$$C = -\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{k^2+2k+3}{2}} + \frac{2+k}{3}A, B = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{k^2+2k+3}{2}} + \frac{2+2k}{3}A.$$

Sostituendo in $A^2+B^2+C^2 = 1$ si trova l'equazione

$$A^2 + (\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{k^2+2k+3}{2}} + \frac{2+2k}{3}A)^2 + (-\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{k^2+2k+3}{2}} + \frac{2+k}{3}A)^2 = 1$$

che sviluppata diventa

$$(1+\frac{(2+2k)^2}{9}+\frac{(2+k)^2}{9})A^2+[\frac{4+4k}{3}(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{k^2+2k+3}{2}})+\frac{4+2k}{3}(-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{k^2+2k+3}{2}})]A+$$

$$+(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{k^2+2k+3}{2}})^2 + (-\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{k^2+2k+3}{2}})^2 - 1 = 0.$$

Il discriminante di questa equazione di secondo grado è

$$-\frac{2}{81}(45+26k+13k^2+2\sqrt{6}(17+6k)\sqrt{3+2k+k^2})$$

che può essere positivo per alcuni valori di $k$. Quindi un tale piano $p'$ esiste.

(c) La chiusure proiettive hanno equazioni

$$\overline{r} : \begin{cases} X_0 + X_1 + X_2 + X_3 = 0 \\ X_1 - X_2 = 0 \end{cases}, \quad \overline{s}_k : \begin{cases} X_1 + X_2 + kX_3 = 0 \\ X_2 - X_3 = 0 \end{cases}.$$

Scelto il punto $P = P[1, 0, 0, 0] \in \overline{s}_k$, osserviamo che il piano $p''$ contenente $\overline{r}$ avrà equazione

$$\alpha(X_0 + X_1 + X_2 + X_3) + \beta(X_1 - X_2) = 0$$

e il passaggio per $P$, sostituendo, implica che $\alpha = 0$. Quindi $p''$ è il piano di equazione $X_1 - X_2 = 0$. ■

**3.** Siano $k, h \in \mathbb{R}$ e siano $\mathcal{C}_k$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$kX^2 + 4Y^2 + (k-2)XY - 1 = 0$$

e $\mathcal{D}_h$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$hX^2 + Y^2 + 1 = 0.$$

(a) Determinare per quali $k, h$ si ha che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono non degeneri, semplicemente degeneri o doppiamente degeneri e sono (o no) a centro.

(b) Determinare l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}_k$ per ogni $k$.

(c) Determinare i valori $k$ e di $h$ per cui $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono affinemente equivalenti (nel caso affine) o congruenti (nel caso euclideo).

**SOLUZIONE:**

(a) La matrice di $\mathcal{C}_k$ è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & k & \frac{k-2}{2} \\ 0 & \frac{k-2}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

e si ha $\det(A) = \frac{k^2-20k+4}{4} = 0$ se solo se $k = 10 \pm 4\sqrt{6}$ e, in tal caso, si vede subito che $A$ ha rango 2. Pertanto

$$\mathcal{C}_k \text{ è: non degenere se } k \neq 10 \pm 4\sqrt{6}, \text{ semplicemente degenere se } k = 10 \pm 4\sqrt{6}.$$

Invece

$$A_0 = \begin{pmatrix} k & \frac{k-2}{2} \\ \frac{k-2}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

e si ha $\det(A_0) = \frac{k^2-20k+4}{4} = 0$ se solo se $k = 10 \pm 4\sqrt{6}$ quindi

$$\mathcal{C}_k \text{ è: a centro se } k \neq 10 \pm 4\sqrt{6}, \text{ non a centro se } k = 10 \pm 4\sqrt{6}.$$

La matrice di $\mathcal{D}_h$ è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e si ha $\det(B) = h$ e pertanto

$$\mathcal{D}_h \text{ è: non degenere se } h \neq 0 \text{ semplicemente degenere se } \ h = 0.$$

Inoltre

$$B_0 = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e si ha $\det(B_0) = h$ e pertanto

$$\mathcal{D}_h \text{ è: a centro se } h \neq 0, \text{ non a centro se } \ h = 0.$$

(b) Il polinomio caratteristico di $A_0$ è

$$\begin{vmatrix} k-T & \frac{k-2}{2} \\ \frac{k-2}{2} & 4-T \end{vmatrix} = T^2 - (4+k)T + 4k - \frac{(k-2)^2}{4}$$

e pertanto gli autovalori sono $\lambda_1 = \frac{4+k-\sqrt{2k^2-12k+20}}{2}, \lambda_2 = \frac{4+k+\sqrt{2k^2-12k+20}}{2}$, in quanto $2k^2 - 12k + 20 \geq 0$ per ogni $k$.

Come è noto, applicando l'isometria corrispondente ad una base ortonormale di autovettori si ottiene l'equazione

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 - 1 = 0.$$

Per arrivare all'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}_k$ occorre studiare il segno degli autovalori. Osserviamo allora che si ha

$$\lambda_1 \geq 0$$

se e solo se

$$4 + k \geq \sqrt{2k^2 - 12k + 20}$$

se e solo se

$$k \geq -4 \text{ e } k^2 - 20k + 4 \leq 0$$

se e solo se
$$10 - 4\sqrt{6} \leq k \leq 10 + 4\sqrt{6}.$$
In particolare
$$\lambda_1 = 0 \text{ se e solo se } k = 10 \pm 4\sqrt{6}.$$
Invece
$$\lambda_2 \geq 0$$
se e solo se
$$\sqrt{2k^2 - 12k + 20} \geq -4 - k$$
se e solo se
$$k \geq -4 \text{ oppure } \{k \leq -4 \text{ e } k^2 - 20k + 4 \geq 0\}$$
se e solo se
$$k \geq -4 \text{ oppure } k \leq -4 \text{ e } \{k \leq 10 - 4\sqrt{6} \text{ o } k \geq 10 + 4\sqrt{6}\}$$
quindi $\lambda_2 \geq 0$ per ogni $k$. Inoltre si vede che
$$\lambda_2 > 0 \text{ per ogni } k.$$
Scambiando $X$ e $Y$ si ha
$$(*) \quad \lambda_2 X^2 + \lambda_1 Y^2 - 1 = 0.$$
Caso 1: $k = 10 \pm 4\sqrt{6}$.
Si ha
$$\lambda_2 X^2 - 1 = 0$$
da cui scambiando $X$ e $Y$ e dividendo per $\lambda_2$ si ottiene l'equazione canonica euclidea
$$Y^2 = (\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}})^2$$
e l'equazione canonica affine
$$Y^2 = 1.$$
Caso 2: $k < 10 - 4\sqrt{6}$ o $k > 10 + 4\sqrt{6}$.
Allora $\lambda_1 < 0$ e dalla $(*)$ si ottiene l'equazione canonica euclidea
$$\frac{X^2}{(\sqrt{\frac{1}{\lambda_2}})^2} - \frac{Y^2}{(\sqrt{\frac{1}{-\lambda_1}})^2} = 1$$

e l'equazione canonica affine

$$X^2 - Y^2 = 1.$$

Caso 3: $10 - 4\sqrt{6} < k < 10 + 4\sqrt{6}$.

Allora $\lambda_1 > 0$ e dalla $(*)$ si ottiene

$$\frac{X^2}{(\sqrt{\frac{1}{\lambda_2}})^2} + \frac{Y^2}{(\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}})^2} = 1$$

da cui, scambiando $X$ e $Y$ e osservando che $\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}} \geq \sqrt{\frac{1}{\lambda_2}}$, si ha l'equazione canonica euclidea

$$\frac{X^2}{(\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}})^2} + \frac{Y^2}{(\sqrt{\frac{1}{\lambda_2}})^2} = 1$$

e l'equazione canonica affine

$$X^2 + Y^2 = 1.$$

(c) Se $h = 0$ si ha che $\mathcal{D}_0$ ha equazione canonica affine

$$Y^2 + 1 = 0$$

quindi in tal caso $\mathcal{D}_0$ non è equivalente a $\mathcal{C}_k$.

Se $h > 0$ allora $\mathcal{D}_h$ ha equazione canonica affine

$$X^2 + Y^2 + 1 = 0$$

quindi anche in questo caso $\mathcal{D}_h$ non è equivalente a $\mathcal{C}_k$.

Invece se $h < 0$ si vede subito che l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{D}_h$ è

$$\frac{X^2}{1^2} - \frac{Y^2}{(\sqrt{-\frac{1}{h}})^2}1 = 1$$

se $h \leq -1$, oppure è

$$\frac{X^2}{(\sqrt{-\frac{1}{h}})^2} - \frac{Y^2}{1^2} = 1$$

se $-1 \leq h < 0$. In entrambi i casi l'equazione canonica affine è

$$X^2 - Y^2 = 1.$$

Se ne deduce che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono affinemente equivalenti se e solo se $h < 0$ e $k < 10 - 4\sqrt{6}$ o $k > 10 + 4\sqrt{6}$.
Negli stessi casi verifichiamo quando sono congruenti.
Se $-1 \leq h < 0$, $\mathcal{D}_h$ e $\mathcal{C}_k$ sono congruenti se e solo se

$$\frac{1}{\lambda_2} = -\frac{1}{h} \text{ e } -\frac{1}{\lambda_1} = 1$$

ovvero se e solo se

$$\lambda_2 = -h, \lambda_1 = -1$$

quindi se e solo se

$$k = 12 \pm 4\sqrt{10}, h = -\frac{16 \pm 4\sqrt{10} + \sqrt{2(12 \pm 4\sqrt{10})^2 - 12(12 \pm 4\sqrt{10}) + 20}}{2} < -1$$

contraddizione.
Invece se $h < -1$, $\mathcal{D}_h$ e $\mathcal{C}_k$ sono congruenti se e solo se

$$\frac{1}{\lambda_2} = 1 \text{ e } -\frac{1}{\lambda_1} = -\frac{1}{h}.$$

Ma si vede subito che $\lambda_2 = 1$ non ha soluzioni.
Quindi $\mathcal{D}_h$ e $\mathcal{C}_k$ non sono mai congruenti. ■