UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE210 - Geometria 2

a.a. 2021-2022

Prova scritta del 14-9-2022

TESTO

Svolgere tutti gli esercizi.

1. Siano $k, h \in \mathbb{R}$ e sia V uno spazio vettoriale euclideo con base ortonormale $e = \{e_1, e_2, e_3\}$. Sia $T : V \to V$ un operatore lineare tale che

$T(e_1) = 2e_1 + ke_2 + he_3, T(e_1 + e_3) = 2e_1 + (k+1)e_2 + (h+2)e_3, T(e_2) = ke_1 + he_2 + e_3.$

(a) Determinare tutti i valori di k, h per i quali T è un operatore simmetrico.

(b) Per tutti i valori di k, h trovati in (a), determinare una matrice $M \in O(3)$ che diagonalizza T.

(c) Determinare tutti i valori di k, h per i quali T è un operatore unitario.

2. Sia $k \in \mathbb{R}$. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}^3$ consideriamo le rette di equazioni

$$r : \begin{cases} X + Y + Z + 1 = 0 \\ X - Y = 0 \end{cases}, \quad s_k : \begin{cases} X + Y + kZ = 0 \\ Y - Z = 0 \end{cases}.$$

(a) Determinare le equazioni di tutti i piani p tali che $d(p, r) \neq 0, d(p, s_k) \neq 0$.

(b) Determinare se esiste un piano p' che ha angolo $\frac{\pi}{4}$ sia con r che con s_k.

(c) Considerato $\mathbb{E}^3 \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, determinare le equazioni della chiusura proiettiva $\overline{r}$ di r e $\overline{s}_k$ di s_k. Inoltre, scelto un punto $P \in \overline{s}_k$, trovare l'equazione di un piano $p'' \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ passante per P e contenente $\overline{r}$.

3. Siano $k, h \in \mathbb{R}$ e siano $\mathcal{C}_k$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$kX^2 + 4Y^2 + (k-2)XY - 1 = 0$$

e $\mathcal{D}_h$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$hX^2 + Y^2 + 1 = 0.$$

(a) Determinare per quali k, h si ha che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono non degeneri, semplicemente degeneri o doppiamente degeneri e sono (o no) a centro.

(b) Determinare l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}_k$ per ogni k.

(c) Determinare i valori k e di h per cui $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono affinemente equivalenti (nel caso affine) o congruenti (nel caso euclideo).