UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE210 - Geometria 2

a.a. 2021-2022

Prova scritta del 16-2-2022

TESTO E SOLUZIONI

1. Sia $k \in \mathbb{R}$ tale che $k \neq 0, \frac{1}{2}$ e sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4 con base $\{e_1, \ldots, e_4\}$. Sia $b : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica tale che

$$b(e_1, e_1) = b(e_4, e_4) = 1, b(e_2, e_2) = b(e_3, e_3) = k, b(e_2, e_3) = -k$$

$$e_3 \perp (e_1 - e_4), \langle e_1, e_2 \rangle \subset e_4^\perp \text{ e } \langle e_2, e_3 \rangle \subset e_1^\perp.$$

(a) Determinare la forma canonica di Sylvester di b.

(b) Determinare, se esiste, una matrice $M \in O(4) \setminus SO(4)$ che diagonalizza b.

(c) Determinare se esistono k tali che b ha segnatura $(2, 1)$.

(d) Determinare, per almeno un k, un sottospazio $W \subset V$ di dimensione 3 su cui la restrizione di b definisce un prodotto scalare e calcolare $w_1 \wedge w_2$ dove w_1 e w_2 sono parte di una base ortonormale di W.

SOLUZIONE:

Si ha $b(e_1, e_4) = b(e_2, e_4) = b(e_1, e_2) = b(e_1, e_3) = 0$. Inoltre $b(e_3, e_1 - e_4) = 0$, da cui $0 = b(e_1, e_3) = b(e_3, e_4)$. Pertanto la matrice di b nella base $e = \{e_1, \ldots, e_4\}$ è

$$M_e(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & -k & 0 \\ 0 & -k & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico è

$$\begin{vmatrix} 1-T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k-T & -k & 0 \\ 0 & -k & k-T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-T \end{vmatrix} = T(T-1)^2(T-2k)$$

e quindi gli autovalori sono

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 2k.$$

(a) Come sappiamo $M_e(b)$ è diagonalizzabile e sulla diagonale ci andranno gli autovalori. Osservando che $\lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$ per ogni k, mentre $\lambda_4 > 0$ se e solo se $k > 0$, la forma canonica di Sylvester di b sarà

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ se } k > 0; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{se } k < 0.$$

(c) Ne segue che la segnatura di b è $(2, 1)$ se e solo se $k < 0$.

(b) Sia λ uno degli autovalori e consideriamo il sistema

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k-\lambda & -k & 0 \\ 0 & -k & k-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0$$

ovvero

$$\begin{cases} (1-\lambda)x = 0 \\ (k-\lambda)y - kz = 0 \\ -ky + (k-\lambda)z = 0 \\ (1-\lambda)w = 0 \end{cases}$$

che ha le seguenti soluzioni:

- ($\bullet$) $\lambda = 0$: $x = w = 0, z = y$ che da luogo a

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1, 0);$$

- ($\bullet$) $\lambda = 2k$: $x = w = 0, z = -y$ che da luogo a

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1, 0);$$

- ($\bullet$) $\lambda = 1 : y = z = 0$ che da luogo a

$$v_3 = e_1, v_4 = e_4.$$

Pertanto una base ortonormale di autovettori sarà $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, che da la matrice che diagonalizza b,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dato che $\det M = -1$ (altrimenti bastava cambiare segno ad una colonna), abbiamo anche che $M \in O(4) \setminus SO(4)$.
(d) Nella base $e' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ si ha che

$$M_{e'}(b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Preso $k > 0$ e $W = \langle v_2, v_3, v_4 \rangle$ abbiamo che la restrizione di b definisce un prodotto scalare su W. Inoltre $\{\frac{v_2}{\sqrt{2k}}, v_3, v_4\}$ è una base ortonormale di W rispetto a $b_{|W}$. Scelti $w_1 = v_3, w_2 = v_4$ ne segue che

$$w_1 \wedge w_2 = \frac{v_2}{\sqrt{2k}} = \frac{1}{2\sqrt{k}}(0, 1, -1, 0). \blacksquare$$

2. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}^3$ consideriamo la retta r e i piani p, p' di equazioni

$$r : \begin{cases} X = t + 2 \\ Y = -t - 1 \\ Z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad p : X - Y = 1, \quad p' : X + Z = 0.$$

(a) Determinare, se esistono, le equazioni di tutti i piani q in $\mathbb{E}^3$ tali che l'angolo tra q e p e l'angolo tra q e p' sono entrambi $\frac{\pi}{3}$.
(b) Determinare, se esitono, le equazioni di tutte le rette s in $\mathbb{E}^3$ tali che s è perpendicolare a p e l'angolo tra s e p' è $\frac{\pi}{4}$.
(c) Considerato $\mathbb{E}^3 \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ siano $\overline{r}$ la chiusura proiettiva di r e $\overline{p}$ la chiusura proiettiva di p. Determinare le equazioni di tutti i piani π di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ tali che $L(\overline{r}, \pi \cap \overline{p}) = \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$.

SOLUZIONE:

Osserviamo che i vettori normali a p e p' sono per esempio $v_p = (1, -1, 0)$ e $v_{p'} = (1, 0, 1)$.
(a) Sia q il piano di equazione $AX + BY + CZ + D = 0$ e assumiamo, senza perdita di generalità, che $A^2 + B^2 + C^2 = 1$. Se $v_q = (A, B, C)$ si ha

$$\frac{1}{2} = cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{< v_q, v_p >}{||v_q||||v_p||} = \frac{A - B}{\sqrt{2}}$$

e

$$\frac{1}{2} = cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{< v_q, v_{p'} >}{||v_q||||v_{p'}||} = \frac{A + C}{\sqrt{2}}$$

da cui deduciamo che $B = A - \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $C = -A + \frac{1}{\sqrt{2}}$. Sostituendo in $A^2 + B^2 + C^2 = 1$ si trova che $A = 0, B = -\frac{1}{\sqrt{2}}, C = \frac{1}{\sqrt{2}}$ o $A = \frac{4}{3\sqrt{2}}, B = \frac{1}{3\sqrt{2}}, C = -\frac{1}{3\sqrt{2}}$. Pertanto i piani q sono tutti e soli quelli di equazione

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}Y + \frac{1}{\sqrt{2}}Z + D = 0$$

oppure

$$\frac{4}{3\sqrt{2}}X + \frac{1}{3\sqrt{2}}Y - \frac{1}{3\sqrt{2}}Z + D = 0$$

ovvero, semplificando (e rinominando D)

$$Y - Z + D = 0 \text{ e } 4X + Y - Z + D = 0.$$

(b) Se s esistesse, il suo vettore di direzione sarebbe $v_p = (1, -1, 0)$. Quindi

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = sen(\frac{\pi}{4}) = \frac{< v_s, v_{p'} >}{||v_s||||v_{p'}||} = \frac{1}{2}$$

contraddizione. Quindi una tale retta s non esiste.

(c) Le equazioni di $\overline{r}$ e $\overline{p}$ sono

$$\overline{r} : \begin{cases} 2X_0 - X_1 + X_3 = 0 \\ X_0 + X_2 + X_3 = 0 \end{cases}, \quad \overline{p} : X_0 - X_1 + X_2 = 0.$$

Osserviamo che $\overline{r} \cap \overline{p}$ è un punto: infatti il sistema

$$\begin{cases} 2X_0 - X_1 + X_3 = 0 \\ X_0 + X_2 + X_3 = 0 \\ X_0 - X_1 + X_2 = 0 \end{cases}$$

ha, come si verifica facilmente, le soluzioni $X_0 = X_1 = t, X_2 = 0, X_3 = -t$ e pertanto $\overline{r} \cap \overline{p}$ è il punto $P = [1, 1, 0, -1]$. Ne segue dalla formula di Grassmann che $\dim L(\overline{r}, \overline{p}) = 3$, ovvero che $L(\overline{r}, \overline{p}) = \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$. Quindi, se $\pi = \overline{p}$ allora

$$L(\overline{r}, \pi \cap \overline{p}) = L(\overline{r}, \overline{p}) = \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}.$$

Invece se $\pi \neq \overline{p}$ e π ha equazione $aX_0 + bX_1 + cX_2 + dX_3 = 0$ allora (a, b, c, d) non deve essere multiplo di $(1, -1, 1, 0)$. Inoltre ora $\pi \cap \overline{p}$ è una retta e, affichè $L(\overline{r}, \pi \cap \overline{p}) = \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ è necessario e sufficiente che $\overline{r} \cap (\pi \cap \overline{p}) = \emptyset$. Quindi il sistema

$$\begin{cases} 2X_0 - X_1 + X_3 = 0 \\ X_0 + X_2 + X_3 = 0 \\ X_0 - X_1 + X_2 = 0 \\ aX_0 + bX_1 + cX_2 + dX_3 = 0 \end{cases}$$

non deve avere soluzioni non nulle. Quindi la condizione è che

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

ovvero che $a + b - d \neq 0$. ■

3. Siano $k, h \in \mathbb{R}$ e siano $\mathcal{C}_k$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$X^2 + Y^2 + 2kXY + 2X + 1 = 0$$

e $\mathcal{D}_h$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$X^2 - hY^2 - 1 = 0.$$

(a) Determinare per quali k, h si ha che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono non degeneri, semplicemente degeneri o doppiamente degeneri e sono (o no) a centro.

(b) Determinare l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}_k$ per ogni k.

(c) Determinare i valori k e di h per cui $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono affinemente equivalenti (nel caso affine) o congruenti (nel caso euclideo).

SOLUZIONE:

(a) La matrice di $\mathcal{C}_k$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}$$

da cui $\det A = -k^2$. Dato che $r(A) = 2$ se $k = 0$, si ha che

$$\mathcal{C}_k \text{ è non degenere se e solo se } k \neq 0, \mathcal{C}_k \text{ è semplicemente degenere se solo se } k = 0.$$

La matrice A_0 di $\mathcal{C}_k$ è

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{pmatrix}$$

e si ha $\det A_0 = 1 - k^2$ quindi

$$\mathcal{C}_k \text{ è a centro se e solo se } k \neq \pm 1.$$

La matrice di $\mathcal{D}_h$ è

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -h \end{pmatrix}$$

da cui $\det B = h$. Dato che $r(B) \geq 2$, si ha che

$$\mathcal{D}_h \text{ è non degenere se e solo se } h \neq 0, \mathcal{D}_h \text{ è semplicemente degenere se solo se } h = 0.$$

La matrice B_0 di $\mathcal{D}_h$ è
$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -h \end{pmatrix}$$
e si ha $\det B_0 = -h$ quindi

$$\mathcal{D}_h \text{ è a centro se e solo se } h \neq 0.$$

(b) Osserviamo che se $k = 0$ l'equazione di $\mathcal{C}_0$ è

$$X^2 + Y^2 + 2X + 1 = 0$$

dalla quale, con l'isometria
$$\begin{cases} X = X' - 1 \\ Y = Y' \end{cases}$$
si ottiene l'equazione canonica euclidea (e affine) di $\mathcal{C}_0$:

$$(E1/A1): \; X^2 + Y^2 = 0.$$

Supponiamo da ora in poi $k \neq 0$.
Diagonalizziamo A_0. Si ha

$$P_{A_0}(T) = \begin{vmatrix} 1-T & k \\ k & 1-T \end{vmatrix} = T^2 - 2T + 1 - k^2$$

quindi gli autovalori di A_0 sono $1 \pm k$ e si vede subito che una base ortonormale di autovettori è
$$\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\}.$$
La prima isometria quindi sarà

$$\begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt{2}}(X' + Y') \\ Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-X' + Y') \end{cases}$$

e l'equazione di $\mathcal{C}_k$ diventa

$$(*) \quad (1-k)X^2 + (1+k)Y^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}X + \frac{2}{\sqrt{2}}Y + 1 = 0.$$

(caso 1): $k = 1$.
Applicando a $(*)$ l'isometria
$$\begin{cases} X = X' \\ Y = Y' - \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

si ottiene

$$Y^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{3}{8} = 0$$

da cui, applicando l'isometria

$$\begin{cases} X = -X' - \frac{3\sqrt{2}}{8} \\ Y = Y' \end{cases}$$

si ottiene l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}_1$:

$$(E2): \ Y^2 - 2(\frac{1}{2\sqrt{2}})X = 0$$

mentre quella affine è

$$(A2): \ Y^2 - X = 0.$$

(caso 2): $k = -1$.

Scambiando X ed Y si ottiene da $(*)$

$$-2Y^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}X + \frac{2}{\sqrt{2}}Y + 1 = 0$$

da cui, con l'isometria

$$\begin{cases} X = X' \\ Y = Y' + \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

si ottiene

$$Y^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{5}{8} = 0$$

da cui, applicando l'isometria

$$\begin{cases} X = X' + \frac{5\sqrt{2}}{8} \\ Y = Y' \end{cases}$$

si ottiene l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}_1$:

$$(E3): \ Y^2 - 2(\frac{1}{2\sqrt{2}})X = 0$$

mentre quella affine è

$$(A3): \ Y^2 - X = 0.$$

(caso 3): $k \neq \pm 1$.

Applicando a $(*)$ l'isometria

$$\begin{cases} X' = X - \frac{1}{(1-k)\sqrt{2}} \\ Y' = Y - \frac{1}{(1+k)\sqrt{2}} \end{cases}$$

si trova

$$(1-k)X^2+(1+k)Y^2-\frac{k^2}{1-k^2}=0$$

ovvero, essendo $k\neq 0$,

$$(**)\quad \frac{(1-k)(1-k^2)}{k^2}X^2+\frac{(1+k)(1-k^2)}{k^2}Y^2-1=0.$$

(caso 4): $k<-1$

Da $(**)$ scambiando X e Y, si ottiene l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}_k$:

$$(E4):\quad \frac{X^2}{\left(\sqrt{\frac{k^2}{(1+k)(1-k^2)}}\right)^2}-\frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{-k^2}{(1-k)(1-k^2)}}\right)^2}-1=0$$

mentre quella affine è

$$(A4):\quad X^2-Y^2-1=0.$$

(caso 5): $-1<k<0$.

Scambiando X e Y, l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}_k$ è

$$(E5):\quad \frac{X^2}{\left(\sqrt{\frac{k^2}{(1+k)(1-k^2)}}\right)^2}+\frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{k^2}{(1-k)(1-k^2)}}\right)^2}-1=0$$

mentre quella affine è

$$(A5):\quad X^2+Y^2-1=0.$$

(caso 6): $0<k<1$.

L'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}_k$ è

$$(E6):\quad \frac{X^2}{\left(\sqrt{\frac{k^2}{(1-k)(1-k^2)}}\right)^2}+\frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{k^2}{(1+k)(1-k^2)}}\right)^2}-1=0$$

mentre quella affine è

$$(A6):\quad X^2+Y^2-1=0.$$

(caso 7): $k>1$.

L'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}_k$ è

$$(E7):\quad \frac{X^2}{\left(\sqrt{\frac{k^2}{(1-k)(1-k^2)}}\right)^2}-\frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{-k^2}{(1+k)(1-k^2)}}\right)^2}-1=0$$

mentre quella affine è

$$(A7): \; X^2 - Y^2 - 1 = 0.$$

(c) L'equazione canonica di $\mathcal{D}_h$ è

$$(D1): \; X^2 - \frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{h}}\right)^2} - 1 = 0 \text{ (euclidea); } X^2 - Y^2 - 1 = 0 \text{ (affine), se } h > 0$$

$$(D2): \; X^2 + \frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{-1}{h}}\right)^2} - 1 = 0 \text{ (euclidea); } X^2 + Y^2 - 1 = 0 \text{ (affine), se } h < 0$$

e, scambiando X e Y,

$$(D3) \; Y^2 - 1 = 0 \text{ se } h = 0 \text{ (affine e euclidea).}$$

In base alle equazioni ottenute si vede subito che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono affinemente equivalenti se e solo se sono: $(A4)$ o $(A7)$ e $(D1)$ oppure $(A5)$ o $(A6)$ e $(D2)$.
Per la congruenza restano possibili solo i casi euclidei corrispondenti:
Nel caso $(E4)$ e $(D1)$ si hanno le condizioni

$$\frac{k^2}{(1+k)(1-k^2)} = 1 \text{ e } \frac{k^2}{(1-k)(1-k^2)} = \frac{1}{h}$$

da cui $h = \frac{(1-k)(1-k^2)}{k^2}$ per k tale che $k^3 + 2k^2 - k - 1 = 0$.
Nel caso $(E7)$ e $(D1)$ si hanno le condizioni

$$\frac{k^2}{(1-k)(1-k^2)} = 1 \text{ e } \frac{-k^2}{(1+k)(1-k^2)} = \frac{1}{h}$$

da cui $h = \frac{-(1+k)(1-k^2)}{k^2}$ per k tale che $k^3 - 2k^2 - k + 1 = 0$.
Nel caso $(E5)$ e $(D2)$ si hanno le condizioni

$$\frac{k^2}{(1+k)(1-k^2)} = 1 \text{ e } \frac{k^2}{(1-k)(1-k^2)} = \frac{1}{h}$$

da cui $h = \frac{(1-k)(1-k^2)}{k^2}$ per k tale che $k^3 + 2k^2 - k - 1 = 0$.
Nel caso $(E6)$ e $(D2)$ si hanno le condizioni

$$\frac{k^2}{(1-k)(1-k^2)} = 1 \text{ e } \frac{k^2}{(1+k)(1-k^2)} = \frac{1}{h}$$

da cui $h = \frac{(1+k)(1-k^2)}{k^2}$ per k tale che $k^3 - 2k^2 - k + 1 = 0$. $\blacksquare$