UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE210 - Geometria 2

a.a. 2021-2022

Prova scritta del 16-2-2022

TESTO

1. Sia $k \in \mathbb{R}$ tale che $k \neq 0, \frac{1}{2}$ e sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4 con base $\{e_1, \dots, e_4\}$. Sia $b : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica tale che

$$b(e_1, e_1) = b(e_4, e_4) = 1, b(e_2, e_2) = b(e_3, e_3) = k, b(e_2, e_3) = -k$$

$$e_3 \perp (e_1 - e_4), \langle e_1, e_2 \rangle \subset e_4^{\perp} \text{ e } \langle e_2, e_3 \rangle \subset e_1^{\perp}.$$

(a) Determinare la forma canonica di Sylvester di b.

(b) Determinare, se esiste, una matrice $M \in O(4) \setminus SO(4)$ che diagonalizza b.

(c) Determinare se esistono k tali che b ha segnatura $(2, 1)$.

(d) Determinare, per almeno un k, un sottospazio $W \subset V$ di dimensione 3 su cui la restrizione di b definisce un prodotto scalare e calcolare $w_1 \wedge w_2$ dove w_1 e w_2 sono parte di una base ortonormale di W.

2. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}^3$ consideriamo la retta r e i piani p, p' di equazioni

$$r : \begin{cases} X = t + 2 \\ Y = -t - 1 \\ Z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad p : X - Y = 1, \quad p' : X + Z = 0.$$

(a) Determinare, se esistono, le equazioni di tutti i piani q in $\mathbb{E}^3$ tali che l'angolo tra q e p e l'angolo tra q e p' sono entrambi $\frac{\pi}{3}$.

(b) Determinare, se esitono, le equazioni di tutte le rette s in $\mathbb{E}^3$ tali che s è perpendicolare a p e l'angolo tra s e p' è $\frac{\pi}{4}$.

(c) Considerato $\mathbb{E}^3 \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ siano $\overline{r}$ la chiusura proiettiva di r e $\overline{p}$ la chiusura proiettiva di p. Determinare le equazioni di tutti i piani π di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ tali che $L(\overline{r}, \pi \cap \overline{p}) = \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$.

3. Siano $k, h \in \mathbb{R}$ e siano $\mathcal{C}_k$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$X^2 + Y^2 + 2kXY + 2X + 1 = 0$$

e $\mathcal{D}_h$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$X^2 - hY^2 - 1 = 0.$$

(a) Determinare per quali k, h si ha che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono non degeneri, semplicemente degeneri o doppiamente degeneri e sono (o no) a centro.
(b) Determinare l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}_k$ per ogni k.
(c) Determinare i valori k e di h per cui $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono affinemente equivalenti (nel caso affine) o congruenti (nel caso euclideo).