UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE210 - Geometria 2

a.a. 2021-2022

Prova scritta del 22-6-2022

TESTO E SOLUZIONI

1. Sia k un numero reale. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ una sua base.

(a) Mostrare che esiste un'unica forma bilineare simmetrica $b : V \times V \to \mathbb{R}$ tale che

$$b(e_1, e_1) = 2, b(e_1, e_3) = -1, b(e_2, e_2) = 1, b(e_3, e_3) = 1, e_2 \perp e_3, e_1 \in (e_2 + ke_3)^{\perp}.$$

(b) Calcolare la matrice di b nella forma canonica di Sylvester e determinare i valori di k per i quali b definisce un prodotto scalare su V.

(c) Determinare una matrice $M \in SO(3)$ che diagonalizza b.

(d) Sia k tale che b definisce un prodotto scalare su V. Calcolare l'angolo tra e_1 ed e_3 e il prodotto vettoriale $e_1 \wedge e_3$.

SOLUZIONE:

Si ha $b(e_2, e_3) = 0$ e $0 = b(e_1, e_2 + ke_3) = b(e_1, e_2) - k$, da cui $b(e_1, e_2) = k$. Pertanto la matrice di b nella base $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ è

$$M_e(b) = \begin{pmatrix} 2 & k & -1 \\ k & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico è

$$\begin{vmatrix} 2-T & k & -1 \\ k & 1-T & 0 \\ -1 & 0 & 1-T \end{vmatrix} = (1-T)(T^2 - 3T + 1 - k^2)$$

e quindi gli autovalori sono

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{3 + \sqrt{4k^2+5}}{2}, \lambda_3 = \frac{3 - \sqrt{4k^2+5}}{2}.$$

(a) Come sappiamo $M_e(b)$ è diagonalizzabile e sulla diagonale ci andranno gli autovalori. Osservando che $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ per ogni k, mentre $\lambda_3 \geq 0$ se e solo se $-1 \leq k \leq 1$, la forma canonica di Sylvester di b sarà

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ se } k < -1 \text{ o } k > 1; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ se } k = \pm 1; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ se } -1 < k < 1.$$

In particolare b definisce un prodotto scalare su V se e solo se $-1 < k < 1$.

(b) Sia λ uno degli autovalori e consideriamo il sistema

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & k & -1 \\ k & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

ovvero

$$\begin{cases} (2-\lambda)x + ky - z = 0 \\ kx + (1-\lambda)y = 0 \\ -x + (1-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

che ha le seguenti soluzioni:

(•) $\lambda = 1$: $x = 0, y = 1, z = k$ che da luogo a

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}(0, 1, k);$$

(•) $\lambda = \lambda_i, i = 2, 3$: $x = 1 - \lambda_i, y = -k, z = 1$ che da luogo a

$$v_i = \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda_i)^2 + k^2 + 1}}(1 - \lambda_i, -k, 1).$$

Pertanto una base ortonormale di autovettori sarà $\{v_1, v_2, v_3\}$, che da una matrice che diagonalizza b,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1-\lambda_2}{\sqrt{(1-\lambda_2)^2+k^2+1}} & \frac{1-\lambda_3}{\sqrt{(1-\lambda_3)^2+k^2+1}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} & -\frac{k}{\sqrt{(1-\lambda_2)^2+k^2+1}} & -\frac{k}{\sqrt{(1-\lambda_3)^2+k^2+1}} \\ \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} & \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda_2)^2+k^2+1}} & \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda_3)^2+k^2+1}} \end{pmatrix}.$$

Dato che

$$\begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda_2 & 1-\lambda_3 \\ 1 & -k & -k \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1+k^2)\sqrt{4k^2+5} > 0$$

abbiamo anche che $M \in SO(3)$.

(d) Sia k tale che $-1 < k < 1$. Se θ è l'angolo tra e_1 ed e_3 abbiamo che

$$\cos\theta = \frac{b(e_1, e_3)}{\sqrt{b(e_1, e_1)}\sqrt{b(e_3, e_3)}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

da cui $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

Sia $e_1 \wedge e_3 = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$. Abbiamo che $b(e_1 \wedge e_3, e_1) = b(e_1 \wedge e_3, e_3) = 0$ da cui deduciamo che $\alpha = \gamma = -k\beta$. Inoltre sappiamo che

$$b(e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_3) = b(e_1, e_1)b(e_3, e_3)\mathrm{sen}^2\theta = 1$$

e quindi

$$\beta(-k, 1, -k)M_e(b)\beta \begin{pmatrix} -k \\ 1 \\ -k \end{pmatrix} = 1$$

da cui deduciamo che $\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$. Ne segue che

$$e_1 \wedge e_3 = \pm\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}(-k, 1, -k). \blacksquare$$

2. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}^3$ consideriamo le rette di equazioni

$$r : \begin{cases} Y + 1 = 0 \\ X - 2Y + 1 = 0 \end{cases}, \quad s_k : \begin{cases} X - Z = 0 \\ Y + kZ = 0 \end{cases}.$$

(a) Determinare la distanza di r da s_k.

(b) Sia p il piano di equazione $X - Y = 1$. Esiste un punto $P \in r$ tale che la distanza di P da p è 1?

(c) Considerato $\mathbb{E}^3 \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ determinare le equazioni della chiusura proiettiva $\overline{r}$ di r e $\overline{s}_k$ di s_k e verificare se $\overline{r}$ ed $\overline{s}_k$ sono incidenti o sghembe.

(d) Considerato $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}$, determinare un piano p' in $\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}$ che non interseca né $\overline{r}$ né $\overline{s}_k$, per ogni k.

SOLUZIONE:

(a) Dalle equazioni di r ed s_k, prendendo i minori 2x2 a segni alterni, si ottengono i vettori di direzione

$$v_r = (0, 0, 1), v_{s_k} = (1, -k, 1).$$

Presi $P = P(-3, -1, 0) \in r, Q = Q(0, 0, 0) \in s_k$, usando la formula della la distanza tra due rette si ha

$$d(r, s_k) = \frac{\left| \det \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -k & 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{|3k + 1|}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

(b) Sia $P = P(-3, -1, t) \in r$. Allora

$$d(P, p) = \frac{|-3|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

quindi non ci sono punti $P \in r$ tali che $d(P, p) = 1$.

(c) Le equazioni di $\overline{r}$ e $\overline{s}_k$ sono

$$\overline{r} : \begin{cases} X_0 + X_2 = 0 \\ X_0 + X_1 - 2X_2 = 0 \end{cases}, \quad \overline{s}_k : \begin{cases} X_1 - X_3 = 0 \\ X_2 + kX_3 = 0 \end{cases}.$$

Quindi $\overline{r} \cap \overline{s}_k$ è dato dal sistema

$$\begin{cases} X_0 + X_2 = 0 \\ X_0 + X_1 - 2X_2 = 0 \\ X_1 - X_3 = 0 \\ X_2 + kX_3 = 0 \end{cases}.$$

Come si verifica facilmente, le soluzioni sono $X_0 = X_1 = X_2 = X_3 = 0$ se $k \neq -\frac{1}{3}$, e pertanto $\overline{r} \cap \overline{s}_k = \emptyset$ e le rette sono sghembe, oppure l'intersezione è il punto $P = [-1, 3, 1, 3]$ se $k \neq -\frac{1}{3}$ e le rette sono incidenti.

(d) Prendiamo per esempio il piano p' in $\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}$ di equazioni $X_0 = X_3 = 0$. Allora $\overline{r} \cap p'$ è dato dal sistema

$$\begin{cases} X_4 = 0 \\ X_0 + X_2 = 0 \\ X_0 + X_1 - 2X_2 = 0 \\ X_0 = 0 \\ X_3 = 0 \end{cases}$$

che non ha soluzioni non nulle. Analogamente $\overline{s}_k \cap p'$ è dato dal sistema

$$\begin{cases} X_4 = 0 \\ X_1 - X_3 = 0 \\ X_2 + kX_3 = 0 \\ X_0 = 0 \\ X_3 = 0 \end{cases}$$

non ha soluzioni non nulle. ■

3. Siano $k, h \in \mathbb{R}$ e siano $\mathcal{C}_k$, la conica (affine o euclidea) di equazione

$$(1 + k)X^2 + (1 + k)Y^2 + 2(1 - k)XY - \sqrt{2}X + \sqrt{2}Y = 0$$

e $\mathcal{D}_h$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$hX^2 + Y = 0.$$

(a) Determinare per quali k, h si ha che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono ellissi o parabole.

(b) Determinare un'isometria che trasforma $\mathcal{C}_k$ nella sua equazione canonica euclidea.

(c) Determinare i valori k e di h per cui $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono affinemente equivalenti.

SOLUZIONE:

(a) La matrice A_0 di $\mathcal{C}_k$ è

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1+k & 1-k \\ 1-k & 1+k \end{pmatrix}$$

e si ha $\det A_0 = 4k$ quindi

$$\mathcal{C}_k \text{ è un'ellisse se e solo se } k > 0, \text{ è una parabola se e solo se } k = 0.$$

La matrice B_0 di $\mathcal{D}_h$ è

$$B_0 = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui $\det B_0 = 0$ e quindi, dato che non può essere $h = 0$,

$$\mathcal{D}_h \text{ è una parabola per ogni } h \neq 0.$$

(b) Supponiamo prima $k = 1$. L'equazione di $\mathcal{C}_k$ è

$$2X^2 + 2Y^2 - \sqrt{2}X + \sqrt{2}Y = 0.$$

Con l'isometria

$$\begin{cases} X = X' + \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ Y = Y' - \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

si ottiene

$$2X^2 + 2Y^2 - \frac{1}{2} = 0$$

e quindi l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}_1$ è:

$$\frac{X^2}{(\frac{1}{2})^2} + \frac{Y^2}{(\frac{1}{2})^2} = 1.$$

Supponiamo da ora in poi $k \neq 1$.

Diagonalizziamo A_0. Si ha

$$P_{A_0}(T) = \begin{vmatrix} 1+k-T & 1-k \\ 1-k & 1+k-T \end{vmatrix} = T^2 - (2k+2)T + 4k$$

quindi gli autovalori di A_0 sono 2 e $2k$ e si vede subito che una base ortonormale di autovettori è

$$\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\}.$$

La prima isometria quindi sarà

$$\begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt{2}}(X' + Y') \\ Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-X' + Y') \end{cases}$$

e l'equazione di $\mathcal{C}_k$ diventa, dividendo per 2,

$$kX^2 + Y^2 - X = 0.$$

Caso 1: $k = 0$.
Si ottiene l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}_0$:

$$Y^2 - X = 0.$$

Caso 2: $k \neq 0$.
Con l'isometria

$$\begin{cases} X = X' + \frac{1}{2k} \\ Y = Y' \end{cases}$$

si ottiene

$$kX^2 + Y^2 - \frac{1}{4k} = 0$$

da cui l'equazione canonica euclidea

$$\frac{X^2}{(\frac{1}{2k})^2} + \frac{Y^2}{(\frac{1}{2\sqrt{k}})^2} = 1 \text{ se } 0 < k \leq 1,$$

o, scambiando X e Y,

$$\frac{X^2}{(\frac{1}{2\sqrt{k}})^2} + \frac{Y^2}{(\frac{1}{2k})^2} = 1 \text{ se } k \geq 1$$

e

$$\frac{X^2}{(\frac{1}{2k})^2} - \frac{Y^2}{(\frac{1}{2\sqrt{-k}})^2} = 1 \text{ se } k < 0.$$

(c) Si osservi che $\mathcal{D}_h$ è sempre una parabola nondegenere di equazione affine (normalizzando i coefficienti e scambiando X e Y)

$$Y^2 - X = 0.$$

Dalla (a) deduciamo che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono affinemente equivalenti se e solo se $k = 0$ e $h \neq 0$.
■