UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE210 - Geometria 2

a.a. 2021-2022

Prova scritta del 22-6-2022

TESTO

Svolgere tutti gli esercizi.

1. Sia k un numero reale. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ una sua base.

(a) Mostrare che esiste un'unica forma bilineare simmetrica $b : V \times V \to \mathbb{R}$ tale che

$$b(e_1, e_1) = 2, b(e_1, e_3) = -1, b(e_2, e_2) = 1, b(e_3, e_3) = 1, e_2 \perp e_3, e_1 \in (e_2 + ke_3)^\perp.$$

(b) Calcolare la matrice di b nella forma canonica di Sylvester e determinare i valori di k per i quali b definisce un prodotto scalare su V.

(c) Determinare una matrice $M \in SO(3)$ che diagonalizza b.

(d) Sia k tale che b definisce un prodotto scalare su V. Calcolare l'angolo tra e_1 ed e_3 e il prodotto vettoriale $e_1 \wedge e_3$.

2. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}^3$ consideriamo le rette di equazioni

$$r : \begin{cases} Y + 1 = 0 \\ X - 2Y + 1 = 0 \end{cases}, \quad s_k : \begin{cases} X - Z = 0 \\ Y + kZ = 0 \end{cases}.$$

(a) Determinare la distanza di r da s_k.

(b) Sia p il piano di equazione $X - Y = 1$. Esiste un punto $P \in r$ tale che la distanza di P da p è 1?

(c) Considerato $\mathbb{E}^3 \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ determinare le equazioni della chiusura proiettiva $\overline{r}$ di r e $\overline{s}_k$ di s_k e verificare se $\overline{r}$ ed $\overline{s}_k$ sono incidenti o sghembe.

(d) Considerato $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}$, determinare un piano p' in $\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}$ che non interseca né $\overline{r}$ né $\overline{s}_k$, per ogni k.

3. Siano $k, h \in \mathbb{R}$ e siano $\mathcal{C}_k$, la conica (affine o euclidea) di equazione

$$(1 + k)X^2 + (1 + k)Y^2 + 2(1 - k)XY - \sqrt{2}X + \sqrt{2}Y = 0$$

e $\mathcal{D}_h$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$hX^2 + Y = 0.$$

(a) Determinare per quali k, h si ha che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono ellissi o parabole.

(b) Determinare un'isometria che trasforma $\mathcal{C}_k$ nella sua equazione canonica euclidea.

(c) Determinare i valori k e di h per cui $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono affinemente equivalenti.