UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE210 - Geometria 2

a.a. 2021-2022

Prova scritta del 28-1-2022

TESTO E SOLUZIONI

Svolgere tutti gli esercizi.

1. Sia k un numero reale. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ una sua base.

(a) Mostrare che esiste un'unica forma bilineare simmetrica $b : V \times V \to \mathbb{R}$ tale che

$$b(e_3, e_3) = k + 1, b(e_1, e_1) = k, b(e_1, e_3) = -1, b(e_2, e_2) = 1, b(e_2, e_1) = -1$$

e che il coefficiente di Fourier di $e_2 + e_3$ rispetto a e_2 è 1.

(b) Calcolare la matrice di b nella forma canonica di Sylvester e determinare i valori di k per i quali b definisce un prodotto scalare su V.

(c) Sia k tale che b definisce un prodotto scalare su V. Sia $T : V \to V$ un operatore tale che $M_e(T) = M_e(b)$. Determinare (se esistono) dei valori di k per i quali T è un operatore unitario.

(d) Sia k tale che b definisce un prodotto scalare su V. Calcolare l'angolo tra e_1 ed $e_1 + e_3$ e il prodotto vettoriale $e_2 \wedge e_3$.

SOLUZIONE:

(a) Si ha che

$$1 = a_{e_2}(e_2 + e_3) = \frac{b(e_2 + e_3, e_2)}{b(e_2, e_2)} = 1 + b(e_3, e_2)$$

e quindi

$$b(e_3, e_2) = 0.$$

Questo definisce univocamente una forma bilineare simmetrica b su V tale che

$$M_e(b) = \begin{pmatrix} k & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & k+1 \end{pmatrix}.$$

(b) Si ha $b(e_2, e_2) = 1$, quindi e_2 non è isotropo. Sappiamo che $b(e_2, e_3) = 0$ e $b(e_3, e_3) = k+1$, quindi se $k \neq -1$ anche e_3 non è isotropo.
Caso 1: $k \neq -1$.
Sia $v = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$. Si ha

$$b(v, e_2) = 0 \text{ se e solo se } \beta = \alpha, b(v, e_3) = 0 \text{ se e solo se } \alpha = \gamma(k+1)$$

quindi possiamo scegliere

$$v_1 = (k+1)e_1 + (k+1)e_2 + e_3$$

e ottenere la base $e' = \{e_2, e_3, v_1\}$ che diagonalizza b. Essendo

$$b(v_1, v_1) = b((k+1)e_1, v_1) = (k+1)(k^2-2)$$

la matrice diventa

$$M_{e'}(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k+1 & 0 \\ 0 & 0 & (k+1)(k^2-2) \end{pmatrix}.$$

Si ha $(k+1)(k^2-2) \geq 0$ se e solo se $k \geq \sqrt{2}$ o $-\sqrt{2} \leq k < -1$, da cui deduciamo che la forma canonica di Sylvester di b è, per $k \neq -1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ se } k < -\sqrt{2}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ se } k = -\sqrt{2}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ se } -\sqrt{2} < k < -1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ se } -1 < k < \sqrt{2}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ se } k = \sqrt{2}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ se } k > \sqrt{2}.$$

Caso 2: $k = -1$. Abbiamo

$$M_e(b) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Come prima $b(e_2, e_2) = 1$ e se $v = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$,

$$(*)\ b(v, e_2) = 0 \text{ se e solo se } \beta = \alpha.$$

Preso $w_1 = e_1 + e_2$ si ha che $b(w_1, w_1) = -2$, quindi w_1 non è isotropo. Ora

$$0 = b(e_1 + e_2, v) = b(e_1, v) \text{ se e solo se } \gamma = -2\alpha$$

quindi, usando la $(*)$, possiamo prendere $w_2 = e_1 + e_2 - 2e_3$ e ottenere la base $e'' = \{e_2, w_1, w_2\}$ che diagonalizza b. Essendo $b(w_2, w_2) = 2$ si ha che la forma canonica di Sylvester di b è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ se } k = -1.$$

(c) Dalla (b) deduciamo che b definisce un prodotto scalare su V se e solo se $k > \sqrt{2}$. Sia ora $T : V \to V$ un operatore tale che

$$M_e(T) = M_e(b) = \begin{pmatrix} k & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & k+1 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di T è

$$\begin{vmatrix} k-t & -1 & -1 \\ -1 & 1-t & 0 \\ -1 & 0 & k+1-t \end{vmatrix} = -t^3 + (2k+2)t^2 + (-k^2 - 3k + 1)t + k^2 - 2.$$

Se T è un operatore unitario i suoi autovalori sono ± 1. Ma, posto $t = \pm 1$, dovremmo allora avere che

$$-k = 0 \text{ oppure } 2k^2 + 5k = 0$$

che non sono possibili essendo $k > \sqrt{2}$. Pertanto non esistono valori di k per i quali T è un operatore unitario.

(d) Sia $k > \sqrt{2}$. Se θ è l'angolo tra e_1 ed $e_1 + e_3$ si ha

$$\cos\theta = \frac{b(e_1, e_1 + e_3)}{\sqrt{b(e_1, e_1)}\sqrt{b(e_1 + e_3, e_1 + e_3)}} = \frac{k-1}{\sqrt{k(2k-1)}}$$

da cui

$$\theta = \arccos\left(\frac{k-1}{\sqrt{k(2k-1)}}\right).$$

Dato che $k > \sqrt{2}$ prendiamo come base ortonormale la normalizzata di e', ovvero

$$\left\{\frac{e_2}{\| e_2 \|}, \frac{e_3}{\| e_3 \|}, \frac{v_1}{\| v_1 \|}\right\} = \left\{e_2, \frac{e_3}{\sqrt{k+1}}, \frac{v_1}{\sqrt{(k+1)(k^2-2)}}\right\}$$

da cui deduciamo che

$$e_2 \wedge e_3 = \| e_3 \| \left(e_2 \wedge \frac{e_3}{\| e_3 \|}\right) = \sqrt{k+1}\frac{v_1}{\| v_1 \|} = \frac{1}{\sqrt{k^2-2}} v_1. \ \blacksquare$$

2. Sia E uno spazio euclideo di dimensione 3 e sia $\{O, i, j, k\}$ un suo sistema di coordinate cartesiane. Sia p il piano di E di equazione $X + 2Y + 2Z = 0$ e siano r ed s le rette di E di equazioni

$$r : \begin{cases} X + Y + 2Z = 0 \\ X - 2Z = 0 \end{cases}, \quad s : \begin{cases} X + 2Z = 0 \\ X - Y = 0 \end{cases}.$$

(a) Determinare (se esistono) tutti i punti $P \in E$ tali che P ha distanza 1 da r, da s e da p.
(b) Determinare (se esistono) tutte le rette r' che soddisfano tutte e due le seguenti condizioni: r' è perpendicolare a p e l'angolo tra r' ed s è $\frac{\pi}{3}$.
(c) Considerato $E \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ siano $\overline{p}, \overline{r}$ e $\overline{s}$ le chiusure proiettive di p, r ed s. Siano F_0, F_1, F_2 i punti fondamentali $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$. Determinare (se esistono) dei punti $P_1 \in \overline{p}, P_2 \in \overline{r}$ e $P_3 \in \overline{s}$ tali che $\{P_1, P_2, P_3\}$ sono proiettivamente equivalenti a $\{F_0, F_1, F_2\}$.

SOLUZIONE:

(a) Osserviamo che un vettore di direzione di r è $(1, -2, \frac{1}{2})$, mentre un vettore di direzione di s è $(1, 1, -\frac{1}{2})$. Un punto di r e di s è $Q = Q(0, 0, 0)$. Un vettore normale a p è $(1, 2, 2)$. Sia $P = P(a, b, c)$. Si ha

$$1 = d(P, p) = \frac{|a + 2b + 2c|}{3}$$

da cui $a = -2b - 2c \pm 3$. Ora

$$1 = d(P, r) = \frac{\sqrt{(\frac{1}{2}b - 2c)^2 + (\frac{1}{2}a - c)^2 + (-2a - b)^2}}{\sqrt{\frac{21}{4}}}$$

e

$$1 = d(P, s) = \frac{\sqrt{(-\frac{1}{2}b - c)^2 + (-\frac{1}{2}a - c)^2 + (a - b)^2}}{\sqrt{\frac{9}{4}}}.$$

Eliminando le radici e sviluppando i calcoli si ottiene che

$$\begin{cases} a = -2b - 2c \pm 3 \\ 17a^2 + 5b^2 + 20c^2 + 16ab - 4ac - 8bc = 21 \\ 5a^2 + 5b^2 + 8c^2 - 8ab + 4ac + 4bc = 9 \end{cases}.$$

da cui, sostituendo $a = -2b - 2c \pm 3$ otteniamo che un punto P ha distanza 1 da r, da s e da p se e solo se le sue coordinate soddisfano

$$\begin{cases} a = -2b - 2c \pm 3 \\ 41b^2 + 96c^2 + 104bc + (\mp 204 \pm 48)b + (\mp 204 \mp 12)c + 132 = 0 \\ 41b^2 + 20c^2 + 52bc + (\mp 60 \mp 24)b + (\mp 60 \pm 12)c + 36 = 0 \end{cases}.$$

È possibile verificare che queste equazioni hanno 4 soluzioni in (b, c).
(b) Dato che r' è perpendicolare a p si ha che un vettore di direzione di r' è $(1, 2, 2)$, quindi

$$\frac{1}{2} = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{(1,2,2) \cdot (1,1,-\frac{1}{2})}{\sqrt{9}\sqrt{\frac{9}{4}}} = \frac{4}{9}$$

assurdo. Quindi una tale retta r' non esiste.
(c) Sappiamo che F_0, F_1, F_2 sono punti linearmente indipendenti quindi $\{P_1, P_2, P_3\}$ sono proiettivamente equivalenti a $\{F_0, F_1, F_2\}$ se e solo se $\{P_1, P_2, P_3\}$ sono linearmente indipendenti. Ora l'equazione $\overline{p}$ è $X_1 + 2X_2 + 2X_3 = 0$ mentre le equazioni di $\overline{r}$ e $\overline{s}$ sono

$$\overline{r} : \begin{cases} X_1 + X_2 + 2X_3 = 0 \\ X_1 - 2X_3 = 0 \end{cases}, \quad \overline{s} : \begin{cases} X_1 + 2X_3 = 0 \\ X_1 - X_2 = 0 \end{cases}.$$

Per esempio si può scegliere

$$P_1 = [1, 0, 0, 0], P_2 = [0, 2, -4, 1], P_3 = [0, -2, -2, 1]. \blacksquare$$

3. Siano $k, h \in \mathbb{R}$ e siano $\mathcal{C}_k$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$2kX^2 + kY^2 + 2kXY = 0.$$

e $\mathcal{D}_h$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$X^2 + Y^2 - h = 0.$$

(a) Determinare per quali k, h si ha che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono non degeneri, semplicemente degeneri o doppiamente degeneri e sono (o no) a centro.
(b) Determinare l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}_k$ per ogni k.
(c) Determinare i valori k e di h per cui $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono affinemente equivalenti (nel caso affine) o congruenti (nel caso euclideo).

SOLUZIONE:

(a) Osserviamo che, affinchè $\mathcal{C}_k$ sia una conica, deve necessariamente essere $k \neq 0$. Quindi, dividendo per k, l'equazione di $\mathcal{C} = \mathcal{C}_k$ diventa

$$2X^2 + Y^2 + 2XY = 0.$$

La matrice $\mathcal{C}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui deduciamo che $\mathcal{C}$ è sempre semplicemente degenere ed è a centro.
La matrice di $\mathcal{D}_h$ è

$$\begin{pmatrix} -h & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui deduciamo che $\mathcal{D}_h$ è non degenere se $h \neq 0$, mentre è semplicemente degenere se $h = 0$ ed è sempre a centro.
(b) Diagonalizziamo $A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Si ha

$$P_{A_0}(T) = \begin{vmatrix} 2-T & 1 \\ 1 & 1-T \end{vmatrix} = T^2 - 3T + 1$$

quindi gli autovalori di A_0 sono $\lambda_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Come sappiamo, diagonalizzando A_0, si ottiene l'equazione

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = 0$$

e dunque l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}$:

$$\frac{X^2}{(\sqrt{\frac{2}{3-\sqrt{5}}})^2} + \frac{Y^2}{(\sqrt{\frac{2}{3+\sqrt{5}}})^2} = 0.$$

Ne segue che l'equazione canonica affine di $\mathcal{C}$ è $X^2 + Y^2 = 0$.
(c) Dalla (a) sappiamo che affinchè $\mathcal{C}$ sia affinemente equivalente o congruente a $\mathcal{D}_h$, dovrà necessariamente essere $h = 0$. In tal caso l'equazione canonica (affine o euclidea) di $\mathcal{D}_0$ è $X^2 + Y^2 = 0$.
Ne deduciamo che $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}_h$ non sono mai congruenti, mentre sono affinemente equivalenti se e solo se $h = 0$. ∎