UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE210 - Geometria 2

a.a. 2021-2022

Prova scritta del 28-1-2022

TESTO

1. Sia k un numero reale. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ una sua base.
(a) Mostrare che esiste un'unica forma bilineare simmetrica $b : V \times V \to \mathbb{R}$ tale che

$$b(e_3, e_3) = k + 1, b(e_1, e_1) = k, b(e_1, e_3) = -1, b(e_2, e_2) = 1, b(e_2, e_1) = -1$$

e che il coefficiente di Fourier di $e_2 + e_3$ rispetto a e_2 è 1.
(b) Calcolare la matrice di b nella forma canonica di Sylvester e determinare i valori di k per i quali b definisce un prodotto scalare su V.
(c) Sia k tale che b definisce un prodotto scalare su V. Sia $T : V \to V$ un operatore tale che $M_e(T) = M_e(b)$. Determinare (se esistono) dei valori di k per i quali T è un operatore unitario.
(d) Sia k tale che b definisce un prodotto scalare su V. Calcolare l'angolo tra e_1 ed $e_1 + e_3$ e il prodotto vettoriale $e_2 \wedge e_3$.
2. Sia E uno spazio euclideo di dimensione 3 e sia $\{O, i, j, k\}$ un suo sistema di coordinate cartesiane. Sia p il piano di E di equazione $X + 2Y + 2Z = 0$ e siano r ed s le rette di E di equazioni

$$r : \begin{cases} X + Y + 2Z = 0 \\ X - 2Z = 0 \end{cases}, \quad s : \begin{cases} X + 2Z = 0 \\ X - Y = 0 \end{cases}.$$

(a) Determinare (se esistono) tutti i punti $P \in E$ tali che P ha distanza 1 da r, da s e da p.
(b) Determinare (se esistono) tutte le rette r' che soddisfano tutte e due le seguenti condizioni: r' è perpendicolare a p e l'angolo tra r' ed s è $\frac{\pi}{3}$.
(c) Considerato $E \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ siano $\overline{p}, \overline{r}$ e $\overline{s}$ le chiusure proiettive di p, r ed s. Siano F_0, F_1, F_2 i punti fondamentali $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$. Determinare (se esistono) dei punti $P_1 \in \overline{p}, P_2 \in \overline{r}$ e $P_3 \in \overline{s}$ tali che $\{P_1, P_2, P_3\}$ sono proiettivamente equivalenti a $\{F_0, F_1, F_2\}$.

3. Siano $k, h \in \mathbb{R}$ e siano $\mathcal{C}_k$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$2kX^2 + kY^2 + 2kXY = 0$$

e $\mathcal{D}_h$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$X^2 + Y^2 - h = 0.$$

(a) Determinare per quali k, h si ha che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono non degeneri, semplicemente degeneri o doppiamente degeneri e sono (o no) a centro.
(b) Determinare l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}_k$ per ogni k.
(c) Determinare i valori k e di h per cui $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono affinemente equivalenti (nel caso affine) o congruenti (nel caso euclideo).