UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE210 - Geometria 2

a.a. 2021-2022

Prima prova di esonero

TESTO E SOLUZIONI

1. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione $n \geq 1$ e sia b un forma bilineare simmetrica su V di segnatura $(p, r-p)$, dove r è il rango di b.
(a) Dimostrare che

$$p = \max\{s \geq 0 : \exists W \subseteq V \text{ sottospazio tale che} \dim W = s \text{ e } b_{|W} \text{ è definita positiva}\}.$$

Sia ora $k \in \mathbb{R}$, $n = 3$ e sia $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base di V.
(b) Mostrare che esiste un'unica forma bilineare simmetrica $b : V \times V \to \mathbb{R}$ tale che

$$b(e_1, e_1) = b(e_1, e_3) = k, b(e_1, e_2) = b(e_2, e_3) = 0, b(e_2, e_2) = 1 \text{ e } e_3 - e_1 \in V^{\perp}$$

e calcolare, per ogni k, la matrice di b nella forma canonica di Sylvester.
(c) Sia $k \neq 0$. Esiste un sottospazio W di V tale che $\dim W = 1$ e $W = W^{\perp}$?

SOLUZIONE:

(a) Se $p = 0$ sia $W_0 = \{0\}$. Se $p \geq 1$, sia $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base di Sylvester per b. Allora posto $W_p = \langle e_1, \ldots, e_p \rangle$ e $e' = \{e_1, \ldots, e_p\}$, sappiamo che

$$M_{e'}(b_{|W_p}) = I_p$$

ovvero che $b_{|W_p}$ è definita positiva. Quindi, in entrambi i casi, un sottospazio di dimensione p sul quale la rerstrizione di b è definita positiva esiste.

Sia ora $W \subseteq V$ un sottospazio tale che $b_{|W}$ è definita positiva e sia $s = \dim W$. Ci resta da dimostrare che

$$s \leq p.$$

Essendo questo ovvio per $s = 0$, supponiamo $s \geq 1$.

Osserviamo che (nonostante b non sia un prodotto scalare) si ha

$$(*) \qquad V = W \oplus W^{\perp}.$$

Intanto $W \cap W^{\perp} = \{0\}$: se $w \in W \cap W^{\perp}$ allora $b(w, w) = 0$, quindi, essendo $b_{|W}$ definita positiva, ne segue che $w = 0$. Sia ora $f' = \{f_1, \dots, f_s\}$ una base di Sylvester per $b_{|W}$, quindi $b(f_i, f_j) = \delta_{ij}$ per $1 \leq i, j \leq s$. Per ogni $v \in V$ siano

$$c_i = b(v, f_i), w = \sum_{i=1}^{s} c_i f_i \text{ e } w' = v - w.$$

Allora $w \in W$ e $w' \in W^{\perp}$: per verificare questo è sufficiente verificare che $b(w', f_j) = 0$ per $1 \leq j \leq s$. E infatti

$$b(w', f_j) = b(v - w, f_j) = b(v, f_j) - \sum_{i=1}^{s} c_i b(f_i, f_j) = c_j - c_j = 0.$$

Quindi abbiamo che $v = w + w'$ con $w \in W$ e $w' \in W^{\perp}$ e la $(*)$ è dimostrata.

Sia ora $f'' = \{f_{s+1}, \dots, f_n\}$ una base di Sylvester per $b_{|W^{\perp}}$. Ne segue da $(*)$ che $f = \{f_1, \dots, f_n\}$ è una base per V. Ora $M_{f'}(b_{|W}) = I_s$ mentre

$$M_{f''}(b_{|W^{\perp}}) = \begin{pmatrix} I_c & 0 & 0 \\ 0 & -I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per certi interi $c \geq 0, d \geq 0$. Pertanto

$$M_f(b) = \begin{pmatrix} I_{s+c} & 0 & 0 \\ 0 & -I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che $p = s + c \geq s$.

(b) Per ipotesi abbiamo $b(e_3 - e_1, e_3) = 0$, da cui $b(e_3, e_3) = b(e_1, e_3) = k$. Questo definisce univocamente una forma bilineare simmetrica b su V tale che

$$M_e(b) = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & k \end{pmatrix}.$$

Sappiamo già che

$$b(e_3 - e_1, e_2) = b(e_3 - e_1, e_3) = b(e_2, e_3) = 0$$

e quindi che $\{e_2, e_3, e_3 - e_1\}$ è una base ortogonale per b. Inoltre $b(e_2, e_2) = 1, b(e_3 - e_1, e_3 - e_1) = 0, b(e_3, e_3) = k$. Quindi la forma canonica di Sylvester di b sarà:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ se } k < 0; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ se } k = 0, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ se } k > 0.$$

(c) Sia $W \subset V$ un sottospazio tale che $\dim W = 1$ e $W = W^\perp$. Essendo $e_3 - e_1 \in V^\perp$ ne segue che $e_3 - e_1 \in W^\perp = W$, quindi $W = \langle e_3 - e_1 \rangle$. Ma allora

$$W = W^\perp = \langle e_3 - e_1 \rangle^\perp = V$$

contraddizione. Dunque un tale W non esiste. ■

2. Sia E lo spazio euclideo standard di dimensione 4 (quindi $E = \mathbb{R}^4$ come spazio affine su sé stesso con il prodotto standard $\langle -, - \rangle$). Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e siano n un versore di $\mathbb{R}^4$ e $Y \in \mathbb{R}^4$. Sia $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da $\varphi(X) = X - \lambda \langle X, n \rangle n$.

(a) Determinare per quali λ si ha che φ è un operatore unitario.

Sia ora $n = (1, 0, 0, 0)$ e sia $f : E \to E$ l'applicazione definita da

$$f(X) = X - \lambda \langle X, n \rangle n + Y.$$

(b) Per quali λ si ha che f è un'isometria? f può essere una traslazione?

(c) Nel caso in cui f è un'isometria, determinare, se esistono, tutti gli Y tali che f ha almeno un punto fisso, ovvero un $X \in \mathbb{R}^4$ tale che $f(X) = X$.

SOLUZIONE:

(a) Sappiamo che φ è un operatore unitario se e solo se $\langle \varphi(X), \varphi(X) \rangle = \langle X, X \rangle$ per ogni $X \in \mathbb{R}^4$. Ora

$$\langle \varphi(X), \varphi(X) \rangle = \langle X - \lambda \langle X, n \rangle n, X - \lambda \langle X, n \rangle n \rangle = \langle X, X \rangle - 2\lambda \langle X, n \rangle^2 + \lambda^2 \langle X, n \rangle^2$$

da cui deduciamo che φ è un operatore unitario se e solo se

$$\lambda(\lambda - 2)\langle X, n \rangle^2 = 0 \text{ per ogni } X \in \mathbb{R}^4.$$

Dunque se $\lambda = 0, 2$ allora φ è un operatore unitario. Viceversa se φ è un operatore unitario allora, preso $X = n$, si ha che

$$\lambda(\lambda - 2) = 0$$

da cui $\lambda = 0, 2$. Se ne conclude che φ è un operatore unitario se e solo se $\lambda = 0, 2$.
(b) Ricordiamo che se $X, X' \in E$, la struttura di spazio affine è data da $\overrightarrow{XX'} = X' - X$. Mostriamo che φ è l'operatore associato ad f:

$$\overrightarrow{f(X)f(X')} = f(X') - f(X) = X' - \lambda\langle X', n\rangle n + Y - X + \lambda\langle X, n\rangle n - Y =$$

$$= X' - X - \lambda\langle X' - X, n\rangle n = \varphi(X' - X) = \varphi(\overrightarrow{XX'}).$$

Dalla (a) segue che f è un'isometria se e solo se $\lambda = 0, 2$.
Inoltre se $\lambda = 0$ abbiamo che $f(X) = X + Y$, quindi f è la traslazione definita da Y. Invece se $\lambda = 2$, se f fosse una traslazione, avremmo che φ è l'identità. Preso $X = n$ si avrebbe che

$$n = \varphi(n) = n - 2\langle n, n\rangle n = -n$$

che implica la contraddizione $n = 0$.
Se ne conclude che f è una traslazione se e solo se $\lambda = 0$.
(c) Sia $\lambda = 0, 2$. Sia $X \in E$. Allora X è un punto fisso di f se e solo se

$$X = f(X) = X - \lambda\langle X, n\rangle n + Y$$

ovvero se e solo se

$$Y = \lambda\langle X, n\rangle n.$$

Ora se $\lambda = 0$ deduciamo che $Y = 0$ e f è l'indentità, quindi tutti i punti sono fissi. Se $\lambda = 2$ allora deve essere $Y = cn$, dove $c = \langle 2X, n\rangle$. Viceversa se $Y = cn$ allora f ha come punto fisso $X_0 = \frac{c}{2}n$:

$$f(X_0) = f(\frac{c}{2}n) = \frac{c}{2}n - 2\langle\frac{c}{2}n, n\rangle n + cn = \frac{c}{2}n = X_0.$$

Ne concludiamo che f ha un punto fisso se e solo se $\lambda = 0$ e $Y = 0$, oppure $\lambda = 2$ e $Y = cn$ per qualche $c \in \mathbb{R}$. ■

3. Sia E uno spazio euclideo di dimensione 3 e sia $\{O, i, j, k\}$ un suo sistema di coordinate cartesiane con coordinate X, Y, Z.
Siano p_1 e p_2 i piani di E di equazioni

$$p_1 : X + Y - Z = 0, \quad p_2 : X - Y + Z = 0$$

e sia r la retta di equazioni $\begin{cases} X = 0 \\ Z = 1 \end{cases}$.

(a) Determinare, se esistono, tutti i piani p di E tale che p è ortogonale a p_1 e p_2 e p è parallelo ad r.

(b) Determinare, se esistono, tutti i piani p di E tali che

$$\text{angolo}(p, p_1) = \text{angolo}(p, p_2) = \frac{\pi}{3} \text{ e } d(r \cap p_1, p) = 1.$$

(c) Esiste una retta s in E tale che $d(s, r) = 1$ e s è parallela a p_1 e p_2?

SOLUZIONE:

(a) Sia p un piano di E di equazione $AX + BY + CZ + D = 0$ e tale che p è ortogonale a p_1 e p_2 e p è parallelo ad r. Si ha

$$p \perp p_1 \iff (A, B, C) \perp (1, 1, -1) \iff A + B - C = 0$$

e

$$p \perp p_2 \iff (A, B, C) \perp (1, -1, 1) \iff A - B + C = 0.$$

Preso $v_r = (0, 1, 0)$ abbiamo inoltre che

$$p \parallel r \iff (0, 1, 0) \text{ è una soluzione di } AX + BY + CZ = 0 \iff B = 0.$$

Pertanto abbiamo che

$$\begin{cases} A + B - C = 0 \\ A - B + C = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

che implica $A = B = C = 0$, dunque un tale p non esiste.

(b) Sia p un piano di E di equazione $AX+BY+CZ+D = 0$, dove, per comodità assumiamo che $A^2 + B^2 + C^2 = 1$, e tale che angolo(p, p_1) = angolo$(p, p_2) = \frac{\pi}{3}$ e $d(r \cap p_1, p) = 1$. Abbiamo allora

$$\frac{1}{2} = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{< (A, B, C), (1, 1, -1) >}{||(A, B, C)||||(1, 1, -1)||} = \frac{A + B - C}{\sqrt{3}}$$

e analogamente

$$\frac{1}{2} = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{< (A, B, C), (1, -1, 1) >}{||(A, B, C)||||(1, -1, 1)||} = \frac{A - B + C}{\sqrt{3}}$$

da cui deduciamo che

$$\begin{cases} A+B-C=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ A-B+C=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ A^2+B^2+C^2=1 \end{cases}$$

che ha per soluzioni $A=\frac{\sqrt{3}}{2}, B=C=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$.
Inoltre chiaramente $r\cap p_1$ è il punto $P_0=P_0(0,1,1)$, quindi

$$d(r\cap p_1,p)=1 \iff 1=|B+C+D|$$

da cui deduciamo che

$$D=\begin{cases} \frac{\pm 2-\sqrt{2}}{2} \text{ se } B=\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\pm 2+\sqrt{2}}{2} \text{ se } B=-\frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}.$$

Quindi ci sono esattamente quattro piani che soddisfano le condizioni richieste, di equazioni

$$2\sqrt{3}X+\sqrt{2}Y+\sqrt{2}Z\pm 4-2\sqrt{2}=0 \text{ e } 2\sqrt{3}X-\sqrt{2}Y-\sqrt{2}Z\pm 4+2\sqrt{2}=0.$$

(c) Sia s una retta in E tale che $d(s,r)=1$ e s è parallela a p_1 e p_2. Sia $v_s=(l,m,n)$ un vettore di direzione di s. Abbiamo

$$s\parallel p_1 \iff (l,m,n) \text{ è una soluzione di } X+Y-Z=0 \iff l+m-n=0$$

e

$$s\parallel p_2 \iff (l,m,n) \text{ è una soluzione di } X-Y+Z=0 \iff l-m+n=0$$

da cui deduciamo che $l=0$ e $n=m$. Quindi possiamo anche prendere $v_s=(0,1,1)$. Sia ora $Q=Q(a,b,c)$ un punto di s e scegliamo $Q_1=Q_1(0,0,1)\in r$. Si ha

$$1=d(s,r)=\frac{\left|\det\begin{pmatrix} a & b & c-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2}}=|a|$$

da cui deduciamo che tutte le rette s cercate sono quelle di equazioni parametriche

$$s:\begin{cases} X=\pm 1 \\ Y=t+b \\ Z=t+c \end{cases}, t\in\mathbb{R}, \text{ per ogni } b,c\in\mathbb{R}. \blacksquare$$