UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE210 - Geometria 2

a.a. 2021-2022

Prima prova di esonero

TESTO

1. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione $n \geq 1$ e sia b un forma bilineare simmetrica su V di segnatura $(p, r-p)$, dove r è il rango di b.

(a) Dimostrare che

$$p = \max\{s \geq 0 : \exists W \subseteq V \text{ sottospazio tale che} \dim W = s \text{ e } b_{|W} \text{ è definita positiva}\}.$$

Sia ora $k \in \mathbb{R}$, $n = 3$ e sia $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base di V.

(b) Mostrare che esiste un'unica forma bilineare simmetrica $b : V \times V \to \mathbb{R}$ tale che

$$b(e_1, e_1) = b(e_1, e_3) = k, b(e_1, e_2) = b(e_2, e_3) = 0, b(e_2, e_2) = 1 \text{ e } e_3 - e_1 \in V^{\perp}$$

e calcolare, per ogni k, la matrice di b nella forma canonica di Sylvester.

(c) Sia $k \neq 0$. Esiste un sottospazio W di V tale che $\dim W = 1$ e $W = W^{\perp}$?

2. Sia E lo spazio euclideo standard di dimensione 4 (quindi $E = \mathbb{R}^4$ come spazio affine su sé stesso con il prodotto standard $\langle -, - \rangle$). Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e siano n un versore di $\mathbb{R}^4$ e $Y \in \mathbb{R}^4$. Sia $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da $\varphi(X) = X - \lambda \langle X, n \rangle n$.

(a) Determinare per quali λ si ha che φ è un operatore unitario.

Sia ora $n = (1, 0, 0, 0)$ e sia $f : E \to E$ l'applicazione definita da

$$f(X) = X - \lambda \langle X, n \rangle n + Y.$$

(b) Per quali λ si ha che f è un'isometria? f può essere una traslazione?

(c) Nel caso in cui f è un'isometria, determinare, se esistono, tutti gli Y tali che f ha almeno un punto fisso, ovvero un $X \in \mathbb{R}^4$ tale che $f(X) = X$.

3. Sia E uno spazio euclideo di dimensione 3 e sia $\{O, i, j, k\}$ un suo sistema di coordinate cartesiane con coordinate X, Y, Z.

Siano p_1 e p_2 i piani di E di equazioni

$$p_1 : X + Y - Z = 0, \quad p_2 : X - Y + Z = 0$$

e sia r la retta di equazioni $\begin{cases} X = 0 \\ Z = 1 \end{cases}$.

(a) Determinare, se esistono, tutti i piani p di E tale che p è ortogonale a p_1 e p_2 e p è parallelo ad r.

(b) Determinare, se esistono, tutti i piani p di E tali che

$$\text{angolo}(p, p_1) = \text{angolo}(p, p_2) = \frac{\pi}{3} \text{ e } d(r \cap p_1, p) = 1.$$

(c) Esiste una retta s in E tale che $d(s, r) = 1$ e s è parallela a p_1 e p_2?