UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE210 - Geometria 2

a.a. 2021-2022

Seconda prova di esonero

TESTO E SOLUZIONI

1. Siano $k, h \in \mathbb{R}$ e sia V uno spazio vettoriale euclideo con base ortonormale $e = \{e_1, e_2, e_3\}$. Sia $T : V \to V$ un operatore lineare tale che

$T(e_1+e_2) = (k+2)e_1+(h+1)e_2+e_3, T(e_1+e_3) = (k+1)e_1+he_2+2e_3, T(e_3) = e_1+e_3.$

(a) Determinare tutti i valori di k, h per i quali T è un operatore simmetrico.
(b) Per tutti i valori di k, h trovati in (a), determinare una matrice $M \in O(3)$ che diagonalizza T.
(c) Determinare per ogni $k \in \mathbb{R}$, almeno un $h \in \mathbb{R}$ tale che non esiste una matrice $M \in O(3)$ che diagonalizza T.

SOLUZIONE:

(a) Come è noto, T è un operatore simmetrico se e solo se la sua matrice, in una base ortonormale, è simmetrica. Utilizziamo pertanto la base e. Si ha

$$T(e_1) + T(e_3) = (k + 1)e_1 + he_2 + 2e_3$$

da cui

$$T(e_1) = ke_1 + he_2 + e_3.$$

Inoltre

$$T(e_1) + T(e_2) = (k + 2)e_1 + (h + 1)e_2 + e_3$$

da cui

$$T(e_2) = 2e_1 + e_2.$$

Ne segue che

$$M_e(T) = \begin{pmatrix} k & 2 & 1 \\ h & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che è simmetrica se e solo se $h = 2$.

(b) Posto allora $h = 2$ il polinomio caratteristico di T è

$$P_T(t) = \begin{vmatrix} k-t & 2 & 1 \\ 2 & 1-t & 0 \\ 1 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)[t^2 - (1+k)t + k - 5]$$

e quindi gli autovalori di T sono $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1+k-\sqrt{k^2-2k+21}}{2}, \lambda_3 = \frac{1+k+\sqrt{k^2-2k+21}}{2}$. I corrrispondenti autovettori sono dati dalle soluzioni dei sistemi

$$\begin{pmatrix} k-\lambda_i & 2 & 1 \\ 2 & 1-\lambda_i & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

per $i = 1, 2, 3$, ovvero dei sistemi

$$\begin{cases} (k-\lambda_i)x + 2y + z = 0 \\ 2x + (1-\lambda_i)y = 0 \\ x + (1-\lambda_i)z = 0 \end{cases}$$

che ha soluzioni $x = 0, y = 1, z = -2$ per $i = 1$, $x = 1 - \lambda_i, y = -2, z = -1$ per $i = 2, 3$. Pertanto gli autovettori normalizzati, messi in colonna, danno la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1-\lambda_2}{\sqrt{(1-\lambda_2)^2+5}} & \frac{1-\lambda_3}{\sqrt{(1-\lambda_2)^2+5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{(1-\lambda_2)^2+5}} & -\frac{2}{\sqrt{(1-\lambda_3)^2+5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{(1-\lambda_2)^2+5}} & -\frac{1}{\sqrt{(1-\lambda_3)^2+5}} \end{pmatrix}.$$

che diagonalizza T.

(c) Se esiste una matrice $M \in O(3)$ che diagonalizza T, allora $M^{-1}M_e(T)M$ è reale, per cui gli autovalori di $M_e(T)$ devono essere tutti reali. Ma, per ogni k,

$$P_T(t) = \begin{vmatrix} k-t & 2 & 1 \\ h & 1-t & 0 \\ 1 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)[t^2 - (1+k)t + k - 2h - 1]$$

non ha tutti gli autovalori reali se

$$h < -\frac{k^2 - 2k + 5}{8}. \blacksquare$$

2. Sia $k \in \mathbb{R}$. Nello spazio affine reale $\mathbb{A}^4$ con coordinate X, Y, Z, W, consideriamo i piani con le seguenti equazioni:

$$p_1 : \begin{cases} X + Y - Z + W = 1 \\ X - Z = 2 \end{cases}, p_2 : \begin{cases} 2X + Y - 2Z + W = 2 \\ Y + kW = 3 \end{cases}.$$

(a) Sia $\mathbb{A}^4 \subset \mathbb{P}^4$ con iperpiano all'infinito H_0 di equazione $X_0 = 0$. Trovare i valori di k tali che $\overline{p}_1 \cap H_0 = \overline{p}_2 \cap H_0$ e dimostrare che questo è equivalente al fatto che p_1 e p_2 sono paralleli in $\mathbb{A}^4$.

Per i valori di k trovati in (a):

(b) Esiste una retta r in $\mathbb{P}^4$ che non interseca né $\overline{p}_1$, né $\overline{p}_2$? Se sí, trovarne almeno una.

(c) Sia r una retta come in (b). Determinare $L(r, \overline{p}_1, \overline{p}_2)$.

SOLUZIONE:

(a) Le equazioni delle chiusure proiettive sono

$$\overline{p}_1 : \begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 + X_4 = X_0 \\ X_1 - X_3 = 2X_0 \end{cases}, \overline{p}_2 : \begin{cases} 2X_1 + X_2 - 2X_3 + X_4 = 2X_0 \\ X_2 + kX_4 = X_0 \end{cases}$$

da cui $\overline{p}_1 \cap H_0 = \overline{p}_2 \cap H_0$ se e solo se la retta

$$r_1 : \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 + X_2 - X_3 + X_4 = X_0 \\ X_1 - X_3 = 2X_0 \end{cases}$$

coincide con la retta

$$r_2 : \begin{cases} X_0 = 0 \\ 2X_1 + X_2 - 2X_3 + X_4 = 2X_0 \\ X_2 + kX_4 = X_0 \end{cases}$$

che è equivalente a dire che

$$\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 + X_2 - X_3 + X_4 = 0 \\ X_1 - X_3 = 0 \end{cases}$$

coincide con

$$\begin{cases} X_0 = 0 \\ 2X_1 + X_2 - 2X_3 + X_4 = 0 \\ X_2 + kX_4 = 0 \end{cases}$$

ovvero che i sistemi

$$\begin{cases} X + Y - Z + W = 0 \\ X - Z = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} 2X + Y - 2Z + W = 0 \\ Y + kW = 0 \end{cases}$$

sono equivalenti.

Dato che le soluzioni di questi due sistemi rappresentano le giaciture di p_1 e p_2, ne deduciamo che $\overline{p}_1 \cap H_0 = \overline{p}_2 \cap H_0$ se e solo se p_1 e p_2 sono paralleli in $\mathbb{A}^4$.

Inoltre $r_1 = r_2$ se e solo se $r_1 \subseteq r_2$, quindi se e solo se ogni punto di r_1 è un punto di r_2. Risolvendo il sistema di r_1, si vede subito che i punti di r_1 sono tutti e soli quelli del tipo $P[0, a, b, a, -b]$. Sostituendo nelle equazioni di r_2 si ottiene che $r_1 = r_2$ se e solo se

$$(1-k)b = 0$$

per ogni a e b, ovvero se e solo se $k = 1$.
(b) Sappiamo che i piani p_1 e p_2 intersecano l'iperpiano all'infinito H_0 nella stessa retta. Dunque per trovare una retta r in $\mathbb{P}^4$ che non interseca né $\overline{p}_1$, né $\overline{p}_2$ è sufficiente scegliere una retta r contenuta in H_0 che non interseca $\overline{p}_1 \cap H_0$. Dato che H_0 ha dimensione 3 la retta r certamente esiste. Per esempio si può prendere la retta r di equazioni

$$r : \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_2 = 0 \\ X_3 = 0 \end{cases}.$$

Infatti

$$r \cap \overline{p}_1 : \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_2 = 0 \\ X_3 = 0 \\ X_1 + X_2 - X_3 + X_4 = X_0 \\ X_1 - X_3 = 2X_0 \end{cases}$$

che ha solo la soluzione nulla, quindi $r \cap \overline{p}_1 = \emptyset$. Analogamente

$$r \cap \overline{p}_2 : \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_2 = 0 \\ X_3 = 0 \\ 2X_1 + X_2 - 2X_3 + X_4 = 2X_0 \\ X_2 + X_4 = X_0 \end{cases}$$

che ha solo la soluzione nulla, quindi $r \cap \overline{p}_2 = \emptyset$.
(c) Si ha che $L(r, \overline{p}_1, \overline{p}_2) = \mathbb{P}^4$. Infatti, se così non fosse, allora $\dim L(r, \overline{p}_1, \overline{p}_2) \leq 3$. Ma allora, essendo $r, \overline{p}_1 \subseteq L(r, \overline{p}_1, \overline{p}_2)$, dalla formula di Grassmann si avrebbe che

$$\dim r \cap \overline{p}_1 \geq 1 + 2 - \dim L(r, \overline{p}_1, \overline{p}_2) \geq 0$$

contraddicendo il fatto che $r \cap \overline{p}_1 = \emptyset$. ∎

3. Siano $k, h \in \mathbb{R}$ e siano $\mathcal{C}_k$, la conica (affine o euclidea) di equazione

$$kX^2 + kY^2 + 2XY + 2Y = 0$$

e $\mathcal{D}_h$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$hX^2 - Y^2 = 0.$$

(a) Determinare per quali k, h si ha che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono ellissi o iperboli.

(b) Determinare un'isometria che trasforma $\mathcal{C}_k$ nella sua equazione canonica euclidea.

(c) Determinare i valori k e di h per cui $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono affinemente equivalenti.

SOLUZIONE:

La matrice di $\mathcal{C}_k$ è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

mentre quella di $\mathcal{D}_h$ è

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo, in vista di (c), che $\mathcal{D}_h$ è degenere per ogni h, mentre $\mathcal{C}_k$ è degenere se e solo se

$$0 = \det A = -k.$$

Ne segue che $k = 0$ è condizione necessaria perchè siano affinemente equivalenti.

(a) La matrice dei termini di secondo grado di $\mathcal{C}_k$ è

$$A_0 = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$$

quindi $\mathcal{C}_k$ è un'ellisse se e solo se $\det A_0 = k^2 - 1 > 0$, se e solo se $k < -1$ o $k > 1$, é un'iperbole se e solo se $\det A_0 = k^2 - 1 < 0$, se e solo se $-1 < k < 1$.

La matrice dei termini di secondo grado di $\mathcal{D}_h$ è

$$B_0 = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

quindi $\mathcal{D}_h$ è un'ellisse se e solo se $\det B_0 = -h > 0$, se e solo se $h < 0$, é un'iperbole se e solo se $\det B_0 = -h < 0$, se e solo se $h > 0$.

(b) e (c) Il polinomio caratteristico di A_0 è

$$\begin{vmatrix} k-t & 1 \\ 1 & k-t \end{vmatrix} = t^2 - 2kt + k^2 - 1$$

e pertanto gli autovalori sono $\lambda_1 = k-1$ e $\lambda_2 = k+1$.

Sia λ uno degli autovalori e consideriamo il sistema

$$\begin{pmatrix} k-\lambda & 1 \\ 1 & k-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

ovvero

$$\begin{cases} (k-\lambda)x + y = 0 \\ x + (k-\lambda)y = 0 \end{cases}.$$

Si vede subito che le soluzioni sono: $y = 1, x = (\lambda - k)y$, quindi una base ortonormale di autovettori è data da

$$\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)\}$$

e la prima isometria f_1 è data dalla matrice

$$M_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ovvero dal cambio di coordinate

$$f_1 : \begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt{2}}(X' - Y') \\ Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X' + Y') \end{cases}.$$

Sostituendo nell'equazione di $\mathcal{C}_k$ si ottiene l'equazione (in cui, per comodità, useremo ancora X e Y),

$$(*) \quad (k+1)X^2 + (k-1)Y^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}X + \frac{2}{\sqrt{2}}Y = 0.$$

Per arrivare all'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}_k$ occorre distinguere i seguenti casi:

Caso 1: $k \neq \pm 1$.

Applicando l'isometria

$$f_2 : \begin{cases} X = X' - \frac{1}{(k+1)\sqrt{2}} \\ Y = Y' - \frac{1}{(k-1)\sqrt{2}} \end{cases}$$

si ottiene l'equazione

$$(**) \quad (k+1)X^2 + (k-1)Y^2 - \frac{k}{(k+1)(k-1)} = 0.$$

Se $k = 0$ l'equazione diventa

$$X^2 - Y^2 = 0$$

che è già in forma canonica.

Supponiamo ora che $k \neq 0$. L'equazione canonica si otterrà da $(**)$ studiando i vari segni dei coefficienti, ma non ci sono altre isometrie da fare, eccetto possibilmente scambi di X e Y. Dividendo per $\frac{k}{(k+1)(k-1)}$ otteniamo

$$\frac{(k+1)^2(k-1)}{k}X^2 + \frac{(k-1)^2(k+1)}{k}Y^2 - 1 = 0.$$

Posto $\alpha = \frac{(k+1)^2(k-1)}{k}$ e $\beta = \frac{(k-1)^2(k+1)}{k}$ è facile vedere dalla dimostrazione del teorema di classificazione delle coniche euclidee che occorrerà fare scambi di X e Y se e solo se:

$$0 < \beta < \alpha \text{ o } \alpha < 0, \beta > 0, \text{ oppure } \alpha < \beta < 0.$$

Si vede facilmente che queste tre condizioni sono soddisfatte se e solo se $k > 0$. Quindi l'isometria cercata è $f_2 \circ f_1$ se $k < 0$ ed è $g \circ f_2 \circ f_1$ dove g è lo scambio di X e Y se $k > 0$. In particolare, per $k = 0$ otteniamo

$$X^2 - Y^2 = 0$$

e ne deduciamo che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono affinemente equivalenti se e solo se $k = 0$ (per quanto visto sopra) e l'equazione canonica affine di $\mathcal{D}_h$ è $X^2 - Y^2 = 0$, ovvero se e solo se $h > 0$. Dunque $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono affinemente equivalenti se e solo se $k = 0$ e $h > 0$.
Questo conclude (c). Ora proseguiamo (b).
Caso 2: $k = 1$.
L'equazione $(*)$, dividendo per 2, è

$$X^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y = 0$$

da cui, applicando l'isometria

$$f_3 : \begin{cases} X = X' - \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ Y = Y' \end{cases}$$

si ottiene l'equazione

$$X^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}Y - \frac{1}{8} = 0.$$

Ora sia f_4 l'isometria che scambia X e Y, da cui otteniamo l'equazione

$$Y^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{1}{8} = 0$$

e con l'isometria

$$f_5 : \begin{cases} X = -X' + \frac{\sqrt{2}}{8} \\ Y = Y' \end{cases}$$

si arriva all'equazione canonica euclidea

$$Y^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}X = 0$$

Quindi l'isometria cercata è $f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_1$.

Caso 3: $k = -1$.

L'equazione $(*)$, dividendo per -2, è

$$Y^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{1}{\sqrt{2}}Y = 0$$

da cui, applicando l'isometria

$$f_7 : \begin{cases} X = X' \\ Y = Y' + \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

si ottiene l'equazione

$$Y^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{1}{8} = 0$$

da cui, con l'isometria

$$f_5 : \begin{cases} X = -X' + \frac{\sqrt{2}}{8} \\ Y = Y' \end{cases}$$

si arriva all'equazione canonica euclidea

$$Y^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}X = 0$$

Quindi l'isometria cercata è $f_5 \circ f_7 \circ f_1$. ■