

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE210 - Geometria 2

a.a. 2021-2022

Seconda prova di esonero

TESTO

1. Siano $k, h \in \mathbb{R}$ e sia V uno spazio vettoriale euclideo con base ortonormale $e = \{e_1, e_2, e_3\}$. Sia $T : V \rightarrow V$ un operatore lineare tale che

$$T(e_1 + e_2) = (k + 2)e_1 + (h + 1)e_2 + e_3, T(e_1 + e_3) = (k + 1)e_1 + he_2 + 2e_3, T(e_3) = e_1 + e_3.$$

(a) Determinare tutti i valori di k, h per i quali T è un operatore simmetrico.

(b) Per tutti i valori di k, h trovati in (a), determinare una matrice $M \in O(3)$ che diagonalizza T .

(c) Determinare per ogni $k \in \mathbb{R}$, almeno un $h \in \mathbb{R}$ tale che non esiste una matrice $M \in O(3)$ che diagonalizza T .

2. Sia $k \in \mathbb{R}$. Nello spazio affine reale \mathbb{A}^4 con coordinate X, Y, Z, W , consideriamo i piani con le seguenti equazioni:

$$p_1 : \begin{cases} X + Y - Z + W = 1 \\ X - Z = 2 \end{cases}, p_2 : \begin{cases} 2X + Y - 2Z + W = 2 \\ Y + kW = 3 \end{cases}.$$

(a) Sia $\mathbb{A}^4 \subset \mathbb{P}^4$ con iperpiano all'infinito H_0 di equazione $X_0 = 0$. Trovare i valori di k tali che $\bar{p}_1 \cap H_0 = \bar{p}_2 \cap H_0$ e dimostrare che questo è equivalente al fatto che p_1 e p_2 sono paralleli in \mathbb{A}^4 .

Per i valori di k trovati in (a):

(b) Esiste una retta r in \mathbb{P}^4 che non interseca né \bar{p}_1 , né \bar{p}_2 ? Se sí, trovarne almeno una.

(c) Sia r una retta come in (b). Determinare $L(r, \bar{p}_1, \bar{p}_2)$.

3. Siano $k, h \in \mathbb{R}$ e siano \mathcal{C}_k , la conica (affine o euclidea) di equazione

$$kX^2 + kY^2 + 2XY + 2Y = 0$$

e \mathcal{D}_h la conica (affine o euclidea) di equazione

$$hX^2 - Y^2 = 0.$$

- (a) Determinare per quali k, h si ha che \mathcal{C}_k e \mathcal{D}_h sono ellissi o iperboli.
- (b) Determinare un'isometria che trasforma \mathcal{C}_k nella sua equazione canonica euclidea.
- (c) Determinare i valori k e di h per cui \mathcal{C}_k e \mathcal{D}_h sono affinementemente equivalenti.