TUTORATO 1 - GE210

Docente: Angelo Felice Lopez

Tutore: Simone Pesatori

8 ottobre 2021

Anno scolastico 21/22

Esercizio 1. Stabilire quali tra le seguenti sono forme bilineari su $\mathbb{R}^3$ e scriverne la matrice associata A rispetto alla base canonica (e_1, e_2, e_3). Sia poi $F = (e_1 - e_2, e_3, e_2 + e_3)$: scrivere la matrice B congruente ad A che rappresenta le forme bilineari nella nuova base F.

(a) $b(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2$

(b) $b(x, y) = \sum_{i=1}^{3} x_i|y_i|$

(c) $b(x, y) = x_1y_2 + x_3y_3 + x_1y_3$

(d) $b(x.y) = x_1 + y_2 + x_3$

(e) $b(x, y) = \sqrt{x_1y_2}$

Esercizio 2. In ciascuno dei seguenti casi determinare la forma bilineare polare della forma quadratica $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(a) $q(x, y) = 3x^2 + 10xy + y^2$

(b) $q(x, y) = 6xy$

(c) $q(x, y) = 4x^2 - 9xy + 5y^2$

Determinare poi matrice e rango di ciascuna forma quadratica.

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}[x]_2$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado al più 2. Verificare che l'applicazione

$$f : V \times V \to \mathbb{R}$$

data da

$$f(p(x), q(x)) = p(0)q(0) - p'(0)q'(1)$$

è una forma bilineare su V.

Esercizio 4. Stabilire se esiste una forma bilineare F su $\mathbb{R}[x]_2$ simmetrica e degenere, tale che

$$F(1,1) = 10;\ F(x,x) = 1;\ F(x^2,x^2) = 1;\ F(x,x^2) = 0;\ F(1,x^2) = 1.$$

[Suggerimento: si scriva la matrice associata ad F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}[x]_2$, che è $(1, x, x^2)$]

Esercizio 5. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$ e sia $b : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare simmetrica su V; discutere la seguente affermazione: l'insieme dei vettori isotropi di V rispetto a b è un sottospazio vettoriale di V.
Se l'affermazione è vera, la si dimostri; se è falsa, si proponga un controesempio.