TUTORATO 3 - GE210

Docente: Angelo Felice Lopez

Tutore: Simone Pesatori

22 ottobre 2021

Anno accademico 21/22

Esercizio 1.Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione 4. Si considerino i vettori $v_1 = (0,1,0,1)$, $v_2 = (2,1,0,1)$, $v_3 = (-1,0,0,1)$, $v_4 = (0,0,1,0)$. A partire da v_1, v_2, v_3 e v_4, trovare una base ortonormale di V applicando il procedimento di Gram-Schmidt.

Esercizio 2. Si consideri $\mathbb{R}^4$ con il prodotto scalare:

$$< x, y >= \frac{1}{2}x_1y_1 + \frac{1}{2}x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4.$$

Applicare il procedimento di Gram-Schmidt ai vettori $v_1 = (1,1,-1,-1)$, $v_2 = (1,1,1,1)$, $v_3 = (-1,-1,-1,1)$ e $v_4 = (1,0,0,1)$ per ottenere una base ortonormale.

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale euclideo e sia $v \in V$, $v \neq 0$.

(a) Dimostrare che l'applicazione $f_v : V \to < v >$, che ad ogni $w \in V$ associa la sua proiezione ortogonale $a_v(w)v$ nella direzione di v, è lineare.

(b) L'applicazione $\rho_v : V \to v^\perp$ definita da $\rho_v(w) = w - a_v(w)v$, si dice proiezione di V su $v^\perp$. Verificare che ρ_v è lineare.

Esercizio 4. Si consideri lo spazio vettoriale $V = M_2(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare standard. Verificare che i vettori

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

costituiscano una base di V ed applicarvi il procedimento di Gram-Schmidt.

Esercizio 5. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 3 con il prodotto scalare standard e siano $u, v \in V$ linearmente indipendenti. Dimostrare che $V =< u, v > \oplus u \wedge v$.

Sia poi $v = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base di V. Si considerino i vettori $u_1 = v_2 \wedge v_3$, $u_2 = v_2$ e $u_3 = u_1 \wedge u_2$: si mostri che $u = \{u_1, u_2, u_3\}$ è una base ortogonale di V.