UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE210 - Geometria 2

a.a. 2023-2024

Prova scritta del 16-2-2024

TESTO E SOLUZIONI

1. Sia K un campo e sia V uno spazio vettoriale su K di dimensione 3 con base $e = \{e_1, e_2, e_3\}$. Sia $b : V \times V \to K$ una forma bilineare simmetrica tale che

$$(*) \qquad b(e_i, e_i) = 2, 1 \le i \le 3, e_3 \perp e_2 \text{ e } e_1 \in (e_1 - 2e_2)^{\perp}.$$

(a) Determinare tutte le possibili b che soddisfano $(*)$ e, quando $K = \mathbb{R}$, la loro forma canonica di Sylvester.

(b) Sia $K = \mathbb{R}$. Per ogni b che soddisfa $(*)$ determinare una matrice $M \in O(3)$ che diagonalizza b.

(c) Scelto un esempio in cui $M_e(b)$ è reale definita positiva, consideriamo $K = \mathbb{C}$ e il prodotto hermitiano definito da $h = b$ su V. Determinare se esiste $a \in \mathbb{C}$ e un operatore unitario $T : V \to V$ tale che $M_e(T) = aM_e(b)$.

SOLUZIONE:

(a) e (b) Abbiamo $b(e_3, e_2) = 0$ e $b(e_1, e_1 - 2e_2) = 0$, da cui $b(e_1, e_2) = 1$. Posto $b(e_1, e_3) = k$, tutte le forme bilineari simmetriche b su V che soddisfano $(*)$ sono quelle con matrice

$$M_e(b) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & k \\ 1 & 2 & 0 \\ k & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Essendo $A = M_e(b)$ simmetrica, sappiamo che, se $K = \mathbb{R}$, b può essere diagonalizzata con una matrice ortogonale, quindi A sarà congruente e simile alla matrice che ha sulla diagonale gli autovalori. Si ha

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 2-T & 1 & k \\ 1 & 2-T & 0 \\ k & 0 & 2-T \end{vmatrix} = (2-T)(T^2 - 4T - k^2 + 3)$$

e gli autovalori di A sono 2 e $2 \pm \sqrt{k^2+1}$. Ora $2 > 0, 2 + \sqrt{k^2+1} > 0$, mentre $2 - \sqrt{k^2+1} \ge 0$ se e solo se $k^2 - 3 \le 0$, ovvero se e solo se $-\sqrt{3} \le k \le \sqrt{3}$. Deduciamo che la forma canonica di Sylvester di b è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ se } k < -\sqrt{3} \text{ o } k > \sqrt{3}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ se } k = \pm\sqrt{3}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ se } -\sqrt{3} < k < \sqrt{3}.$$

Osserviamo per (c) che, preso $k \in \mathbb{R}$, si ha che $M_e(b)$ è reale definita positiva se e solo se $-\sqrt{3} < k < \sqrt{3}$.

Per diagonalizzare A basterà trovare una base ortonormnale di autovettori. Sia λ uno degli autovalori e consideriamo il sistema

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & k \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ k & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

ovvero

$$\begin{cases} (2-\lambda)x + y + kz = 0 \\ x + (2-\lambda)y = 0 \\ kx + (2-\lambda)z = 0 \end{cases}.$$

Se $\lambda = 2$ si vede subito che una soluzione è $(0, -k, 1)$. Se $\lambda = 2 \pm \sqrt{k^2+1}$ si deduce subito che una soluzione è $(\lambda - 2, 1, k) = (\pm\sqrt{k^2+1}, 1, k)$. Dunque una base ortonormale di autovettori sarà $f = \{f_1, f_2, f_3\}$ dove

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}(0, -k, 1), f_2 = \frac{1}{\sqrt{2k^2+2}}(-\sqrt{k^2+1}, 1, k), f_3 = \frac{1}{\sqrt{2k^2+2}}(\sqrt{k^2+1}, 1, k)\}$$

e quindi

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{k}{\sqrt{k^2+1}} & \frac{1}{\sqrt{2k^2+2}} & \frac{1}{\sqrt{2k^2+2}} \\ \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} & \frac{k}{\sqrt{2k^2+2}} & \frac{k}{\sqrt{2k^2+2}} \end{pmatrix}.$$

(c) Scegliamo $k = 0$. Dato che $M_e(T) = aM_e(b) = aA$ abbiamo che gli autovalori di T sono $a\lambda$, dove λ è un autovalore di A. Quindi $\lambda = 2, 1, 3$. Se T fosse unitario avremmo che $|2a| = |a| = |3a| = 1$, che è ovviamente impossibile. Quindi T non è mai un operatore unitario. ■

2. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}^3$ consideriamo il piano p di equazione $Y - 2Z = 0$ e le rette di equazioni

$$r : \begin{cases} X - Y + 1 = 0 \\ X - 2Z + 1 = 0 \end{cases}, \quad s_k : \begin{cases} Y - kZ = 0 \\ X + Z + 2 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare la distanza di r da s_k.

(b) Esiste un punto $P \in s_k$ tale che la distanza di P da r è 2?

(c) Considerato $\mathbb{E}^3 \subset I\!P^3_{\mathbb{R}}$ determinare se esiste k tale che $L(\overline{r}, \overline{s}_k) = \overline{p}$.

SOLUZIONE:

(a) I vettori di direzione di r ed s_k sono dati dai minori 2×2 a segni alterni delle matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & 1 & -k \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui deduciamo che

$$v_r = (2, 2, 1), v_{s_k} = (1, -k, -1).$$

Inoltre scegliamo $Q = Q(-1, 0, 0) \in r, Q' = Q'(-2, 0, 0) \in s_k$. Pertanto

$$d(r, s_k) = \frac{\left| \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -k & -1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -k & -1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -k \end{vmatrix}^2}} = \frac{|k-2|}{\sqrt{5k^2 + 4k + 17}}.$$

(b) Le equazioni parametriche di s_k sono

$$s_k : \begin{cases} X = -2 - t \\ Y = kt & , t \in \mathbb{R} \\ Z = t \end{cases}$$

da cui, preso $P = P(-2 - t, kt, t) \in s_k$ deduciamo che

$$2 = d(P, s_k) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} kt & t \\ 2 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -1-t & t \\ 2 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -1-t & t \\ 2 & 2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{9}}$$

ottenendo l'equazione

$$(5k^2 + 4k + 17)t^2 + 2(4k + 7)t - 31 = 0$$

che ha soluzioni per ogni k essendo

$$\Delta = (4k + 7)^2 + 124(5k^2 + 4k + 17) = 636k^2 + 552k + 2157 \geq 0$$

per ogni k. Pertanto per ogni k esiste un punto $P \in s_k$ tale che $d(P, s_k) = 2$.

(c) Osserviamo che $r \subset p$ dato che $-(X - Y + 1) + (X - 2Z + 1) = Y - 2Z$, che è l'equazione di p. Invece $s_k \subset p$ se e solo se, usando le equazioni parametriche di s_k ottenute in (b),

$$(k - 2)t = 0 \text{ per ogni } t \in \mathbb{R}$$

ovvero se e solo se $k = 2$.
Dunque, se $L(\overline{r}, \overline{s}_k) = \overline{p}$, allora $\overline{s}_k \subset \overline{p}$, quindi

$$s_k = \overline{s}_k \cap (\mathbb{P}^3 \setminus H_0) \subset \overline{p} \cap (\mathbb{P}^3 \setminus H_0) = p$$

e ne segue che $k = 2$.
Viceversa, se $k = 2$, allora $r \subset p, s_2 \subset p$ e quindi, non essendo parallele, $r \cap s_2$ è un punto. Ora $r \cap s_2 \subset \overline{r} \cap \overline{s}_2$, dunque $\overline{r} \cap \overline{s}_2 \neq \emptyset$. Inoltre $0 \leq \dim \overline{r} \cap \overline{s}_2 \leq 1$. Se fosse $\dim \overline{r} \cap \overline{s}_2 = 1$ avremmo che $\overline{r} = \overline{s}_2$, da cui la contraddizione $r = s_2$. Pertanto $\overline{r} \cap \overline{s}_2$ è un punto e quindi, per la formula di Grassmann, $L(\overline{r}, \overline{s}_2)$ è un piano. Dato che $r \subset p, s_2 \subset p$ si vede facilmente che $\overline{r} \subset \overline{p}, \overline{s}_2 \subset \overline{p}$ (per esempio perchè l'equazione di p è combinazione lineare delle equazioni di r e s_2, quindi lo stesso accade per le chiusure proiettive). Essendo $L(\overline{r}, \overline{s}_2)$ l'unico piano che contiene $\overline{r}$ e $\overline{s}_2$, ne segue che $L(\overline{r}, \overline{s}_2) = \overline{p}$.
Dunque $L(\overline{r}, \overline{s}_k) = \overline{p}$ se e solo se $k = 2$. ■

3. Siano $k, h \in \mathbb{R}$ e siano $\mathcal{C}_k$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$2kX^2 + (2k+3)Y^2 + 4XY + 1 = 0.$$

e $\mathcal{D}_h$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$hX^2 + (h-1)Y^2 - X = 0.$$

(a) Determinare per quali k, h si ha che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono non degeneri, semplicemente degeneri o doppiamente degeneri e sono ellissi, iperboli o parabole.
(b) Determinare un'isometria che trasforma $\mathcal{C}_k$ nella sua equazione canonica euclidea.
(c) Determinare i valori k e di h per cui $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono affinemente equivalenti (nel caso affine) o congruenti (nel caso euclideo).

SOLUZIONE:

(a) Le matrici di $\mathcal{C}_k$ sono

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2k & 2 \\ 0 & 2 & 2k+3 \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} 2k & 2 \\ 2 & 2k+3 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo $\det(A) = \det(A_0) = 4k^2 + 6k - 4$, pertanto $\mathcal{C}_k$ è non degenere se e solo se $k \neq -2, \frac{1}{2}$, è semplicemente degenere se e solo se $k = -2, \frac{1}{2}$. Inoltre $\mathcal{C}_k$ è un'ellisse se e solo se $k < -2$ o $k > \frac{1}{2}$, é una parabola se e solo se $k = -2, \frac{1}{2}$ ed é un'iperbole se e solo se $-2 < k < \frac{1}{2}$.

Le matrici di $\mathcal{D}_h$ sono

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & h & 0 \\ 0 & 0 & h-1 \end{pmatrix}, B_0 = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h-1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo $\det(B) = \frac{1-h}{2}, \det(B_0) = h(h-1)$, pertanto pertanto $\mathcal{D}_h$ è non degenere se e solo se $h \neq 1$, è semplicemente degenere se e solo se $h = 1$. Inoltre $\mathcal{D}_h$ è un'ellisse se e solo se $h < 0$ o $h > 1$, é una parabola se e solo se $h = 0, 1$ ed é un'iperbole se e solo se $0 < h < 1$.

(b) Troviamo sia l'equazione canonica euclidea che quella affine (in vista di (c)) di $\mathcal{C}_k$.

Il polinomio caratteristico di A_0 è

$$\begin{vmatrix} 2k-T & 2 \\ 2 & 2k+3-T \end{vmatrix} = T^2 - (4k+3)T + 4k^2 + 6k - 4$$

e pertanto gli autovalori sono $\lambda_1 = 2k-1$ e $\lambda_2 = 2k+4$ e i corrispondenti autovettori sono $(-2, 1), (\frac{1}{2}, 1)$. Dunque una base ortonromale di autovettori di A_0 è $\{\frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1), \frac{2}{\sqrt{5}}(\frac{1}{2}, 1)\}$, pertanto operiamo con l'isometria

$$\begin{cases} X' = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2X + Y) \\ Y' = \frac{1}{\sqrt{5}}(X + 2Y) \end{cases}$$

ottenendo (come doveva essere, visti gli autovalori)

$$(*) \quad (2k-1)X^2 + (2k+4)Y^2 + 1 = 0.$$

Caso 1: $k = \frac{1}{2}$.

Abbiamo da $(*)$, $5Y^2 + 1 = 0$, da cui deduciamo l'equazione canonica euclidea

$$Y^2 + (\frac{1}{\sqrt{5}})^2 = 0$$

e affine $Y^2 + 1 = 0$.

Caso 2: $k = -2$.

Abbiamo da $(*)$, $-5X^2 + 1 = 0$ ovvero, da cui, scambiando X e Y, deduciamo l'equazione canonica euclidea

$$Y^2 - (\frac{1}{\sqrt{5}})^2 = 0$$

e affine $Y^2 - 1 = 0$.

Supponiamo ora $k \neq -2, \frac{1}{2}$.

Caso 3: $k > \frac{1}{2}$.

Abbiamo $2k+4 \geq 2k-1 > 0$. Dato che $\frac{1}{\sqrt{2k-1}} \geq \frac{1}{\sqrt{2k+4}}$, deduciamo da $(*)$ che la forma canonica euclidea è

$$\frac{X^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2k-1}}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2k+4}}\right)^2} = -1.$$

e affine $X^2 + Y^2 = -1$.

Caso 4: $-2 < k < \frac{1}{2}$.

Abbiamo $2k+4 > 0, 2k-1 < 0$ e deduciamo da $(*)$ che la forma canonica euclidea è

$$\frac{X^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{1-2k}}\right)^2} - \frac{Y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2k+4}}\right)^2} = 1$$

e affine $X^2 - Y^2 = 1$.

Caso 5: $k < -2$.

Abbiamo $2k+4 < 0, 2k-1 < 0$ da cui, scambiando X e Y deduciamo da $(*)$ che la forma canonica euclidea è

$$\frac{X^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{-2k-4}}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{1-2k}}\right)^2} = 1$$

e affine $X^2 + Y^2 = 1$.

(c) Se $h = 0$, l'equazione di $\mathcal{D}_0$ è $Y^2 + X = 0$, da cui, con l'isometria $\begin{cases} X' = -X \\ Y' = Y \end{cases}$ otteniamo l'equazione canonica euclidea (e affine) di $\mathcal{D}_0$ è

$$Y^2 - X = 0.$$

Se $h \neq 0$, con l'isometria $\begin{cases} X' = X + \frac{1}{2h} \\ Y' = Y \end{cases}$ otteniamo

$$4h^2X^2 + 4h(h-1)Y^2 = 1$$

da cui abbiamo le seguenti equazioni canoniche euclidee (e affini) di $\mathcal{D}_h$:

$$Y^2 - (\frac{1}{2})^2 = 0 \text{ se } h = 1$$

e affine $Y^2 - 1 = 0$;

$$\frac{X^2}{\left(\frac{1}{-2h}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{4h(h-1)}}\right)^2} = 1 \text{ se } h < 0$$

e affine $X^2 + Y^2 = 1$;

$$\frac{X^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{4h(h-1)}}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\frac{1}{2h}\right)^2} = 1 \text{ se } h > 1$$

e affine $X^2 + Y^2 = 1$;

$$\frac{X^2}{\left(\frac{1}{2h}\right)^2} - \frac{Y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{4h(1-h)}}\right)^2} = 1 \text{ se } 0 < h < 1$$

e affine $X^2 - Y^2 = 1$.

Ne deduciano da (b) che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono affinemente equivalenti se e solo se $h < 0$ o $h > 1$ e $k < -2$, o $h = 1, k = -2$ oppure $0 < h < 1$ e $-2 < k < \frac{1}{2}$.

Per quanto riguarda il caso euclideo. consideriamo i casi sopra.

Se $h = 1, k = -2$ non sono congruenti in quanto $\frac{1}{\sqrt{5}} \neq \frac{1}{2}$.

Se $h < 0$ e $k < -2$ affinché siano congruenti dovrà essere

$$\frac{1}{-2h} = \frac{1}{\sqrt{-2k-4}} \text{ e } \frac{1}{\sqrt{4h(h-1)}} = \frac{1}{\sqrt{1-2k}}.$$

Svolgendo i calcoli si trova $h = -\frac{5}{4}, k = -\frac{41}{8}$.

Se $h > 1$ e $k < -2$ affinché siano congruenti dovrà essere

$$\frac{1}{\sqrt{4h(h-1)}} = \frac{1}{\sqrt{-2k-4}} \text{ e } \frac{1}{2h} = \frac{1}{\sqrt{1-2k}}.$$

Svolgendo i calcoli si trova $h = \frac{5}{4}, k = -\frac{21}{8}$.

Se $0 < h < 1$ e $-2 < k < \frac{1}{2}$ affinché siano congruenti dovrà essere

$$\frac{1}{\sqrt{4h(1-h)}} = \frac{1}{\sqrt{2k+4}} \text{ e } \frac{1}{2h} = \frac{1}{\sqrt{1-2k}}.$$

Svolgendo i calcoli si trova $h = \frac{5}{4}$ che però è maggiore di 1.

Si conclude che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono congruenti se e solo se $h = \frac{5}{4}, k = -\frac{21}{8}$ o $h = -\frac{5}{4}, k = -\frac{41}{8}$.

■