

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE210 - Geometria 2

a.a. 2023-2024

Prova scritta del 16-2-2024

TESTO

1. Sia K un campo e sia V uno spazio vettoriale su K di dimensione 3 con base $e = \{e_1, e_2, e_3\}$. Sia $b : V \times V \rightarrow K$ una forma bilineare simmetrica tale che

$$(*) \quad b(e_i, e_i) = 2, 1 \leq i \leq 3, e_3 \perp e_2 \text{ e } e_1 \in (e_1 - 2e_2)^\perp.$$

(a) Determinare tutte le possibili b che soddisfano $(*)$ e, quando $K = \mathbb{R}$, la loro forma canonica di Sylvester.

(b) Sia $K = \mathbb{R}$. Per ogni b che soddisfa $(*)$ determinare una matrice $M \in O(3)$ che diagonalizza b .

(c) Scelto un esempio in cui $M_e(b)$ è reale definita positiva, consideriamo $K = \mathbb{C}$ e il prodotto hermitiano definito da $h = b$ su V . Determinare se esiste $a \in \mathbb{C}$ e un operatore unitario $T : V \rightarrow V$ tale che $M_e(T) = aM_e(b)$.

2. Nello spazio euclideo reale \mathbb{E}^3 consideriamo il piano p di equazione $Y - 2Z = 0$ e le rette di equazioni

$$r : \begin{cases} X - Y + 1 = 0 \\ X - 2Z + 1 = 0 \end{cases}, \quad s_k : \begin{cases} Y - kZ = 0 \\ X + Z + 2 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare la distanza di r da s_k .

(b) Esiste un punto $P \in s_k$ tale che la distanza di P da r è 2?

(c) Considerato $\mathbb{E}^3 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ determinare se esiste k tale che $L(\bar{r}, \bar{s}_k) = \bar{p}$.

3. Siano $k, h \in \mathbb{R}$ e siano \mathcal{C}_k la conica (affine o euclidea) di equazione

$$2kX^2 + (2k + 3)Y^2 + 4XY + 1 = 0.$$

e \mathcal{D}_h la conica (affine o euclidea) di equazione

$$hX^2 + (h - 1)Y^2 - X = 0.$$

(a) Determinare per quali k, h si ha che \mathcal{C}_k e \mathcal{D}_h sono non degeneri, semplicemente degeneri o doppiamente degeneri e sono ellissi, iperboli o parabole.

- (b) Determinare un'isometria che trasforma \mathcal{C}_k nella sua equazione canonica euclidea.
- (c) Determinare i valori k e di h per cui \mathcal{C}_k e \mathcal{D}_h sono affinementemente equivalenti (nel caso affine) o congruenti (nel caso euclideo).