UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE210 - Geometria 2

a.a. 2023-2024

Prova scritta del 26-1-2024

TESTO E SOLUZIONI

1. Sia k un numero reale. Sia V uno spazio vettoriale reale, sia $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ una sua base e sia $W = \langle e_1 + e_3, e_2 \rangle$.

(a) Mostrare che esiste un'unica forma bilineare simmetrica $b : V \times V \to \mathbb{R}$, con forma quadratica associata $q : V \to \mathbb{R}$, tale che

$$q(e_1) = 1, q(e_3) = 2, b(e_2, e_3) = k$$

e $\{e_1 + e_3, e_2\}$ è un base ortonormale per $b_{|W}$.

(b) Calcolare la matrice di b nella forma canonica di Sylvester e determinare i valori di k per i quali b definisce un prodotto scalare su V.

(c) Sia k tale che b definisce un prodotto scalare su V. Sia $T : V \to V$ un operatore che ha la stessa matrice di b (in una base opportuna). Determinare (se esiste) un operatore $T' : V \to V$ tale che $T'(e_2 - ke_1) = e_2 - ke_1$ e $T + T'$ è un operatore unitario.

(d) Sia k tale che b definisce un prodotto scalare su V. Calcolare il prodotto vettoriale $(e_1 + e_3) \wedge e_2$.

SOLUZIONE:

(a) Dato che $\{e_1 + e_3, e_2\}$ è un base ortonormale per $b_{|W}$, conviene scegliere una base di V che la contiene, per esempio $e' = \{e_1 + e_3, e_2, e_3\}$. Abbiamo

$$b(e_1 + e_3, e_1 + e_3) = 1, b(e_2, e_2) = 1 \text{ e } b(e_1 + e_3, e_2) = 0.$$

Quindi

$$1 = b(e_1 + e_3, e_1 + e_3) = b(e_1, e_1) + 2b(e_1, e_3) + b(e_3, e_3) = 3 + 2b(e_1, e_3)$$

da cui

$$b(e_1, e_3) = -1$$

e quindi

$$b(e_1 + e_3, e_3) = b(e_1, e_3) + b(e_3, e_3) = 1.$$

Questo definisce univocamente una forma bilineare simmetrica b su V tale che

$$M_{e'}(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Essendo $A = M_{e'}(b)$ simmetrica, sappiamo che b può essere diagonalizzata con una matrice ortogonale, quindi A sarà congruente e simile alla matrice che ha sulla diagonale gli autovalori. Si ha

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 1-T & 0 & 1 \\ 0 & 1-T & k \\ 1 & k & 2-T \end{vmatrix} = (1-T)(T^2 - 3T - k^2 + 1)$$

e gli autovalori di A sono 1 e $\frac{3 \pm \sqrt{4k^2+5}}{2}$. Ora $1 > 0$, $\frac{3+\sqrt{4k^2+5}}{2} > 0$, mentre $\frac{3-\sqrt{4k^2+5}}{2} \geq 0$ se e solo se $k^2 - 1 \leq 0$, ovvero se e solo se $-1 \leq k \leq 1$. Deduciamo che la forma canonica di Sylvester di b è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ se } k < -1 \text{ o } k > 1, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ se } k = \pm 1, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ se } -1 < k < 1.$$

Quindi b definisce un prodotto scalare su V se e solo se $-1 < k < 1$.
(c) Assumiamo quindi che $-1 < k < 1$. Dato che $M_{e'}(T) = M_{e'}(b)$ abbiamo che $e_2 - ke_1$ è un autovettore di T con autovalore 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -k \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ma allora $(T + T')(e_2 - ke_1) = 2(e_2 - ke_1)$, quindi $T + T'$ ha autovalore 2, dunque non è un operatore unitario.
(d) Assumiamo quindi che $-1 < k < 1$ e ortonormalizziamo la base $e' = \{e_1 + e_3, e_2, e_3\}$ usando Gram-Schmidt. Posto $v_1 = e_1 + e_3, v_2 = e_2, v_3 = e_3$, sappiamo già che $w_1 = v_1, w_2 = v_2$, mentre

$$w_3 = v_3 - a_{v_1}(v_3)v_1 - a_{v_2}(v_3)v_2 = e_3 - \frac{b(e_1 + e_3, e_3)}{b(e_1 + e_3, e_1 + e_3)}(e_1 + e_3) - \frac{b(e_2, e_3)}{b(e_2, e_2)}e_2 =$$

$$= -(e_1 + e_3) - ke_2 + e_3.$$

Pertanto

$$b(w_3, w_3) = \begin{pmatrix} -1 & -k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -k \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - k^2$$

e quindi la base ortonormalizzata è $\{e_1 + e_3, e_2, \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} w_3\}$, da cui

$$(e_1 + e_3) \wedge e_2 = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} w_3 = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} (-e_1 - ke_2). \blacksquare$$

2. Sia $\mathbb{E}$ uno spazio euclideo di dimensione 3 e sia $\{O, i, j, k\}$ un suo sistema di coordinate cartesiane. Sia p il piano di $\mathbb{E}$ di equazione $X + Y + Z = 0$ e siano r ed s le rette di E di equazioni

$$r : \begin{cases} X + Y + Z = 0 \\ X - Y = 0 \end{cases}, \quad s : \begin{cases} X + Z = 1 \\ X - Y = 1 \end{cases}.$$

(a) Determinare (se esistono) tutte i piani q che soddisfano tutte le seguenti condizioni : q è perpendicolare a p, q non è perpendicolare ad r e l'angolo tra s e q è $\frac{\pi}{3}$.
(b) Determinare (se esiste) un'isometria $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ tale che $f(r) = s$.
(c) Considerato $\mathbb{E} \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ siano $\overline{p}, \overline{r}$ e $\overline{s}$ le chiusure proiettive di p, r ed s. Siano F_0, F_1, F_2 i punti fondamentali $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$. Determinare (se esistono) dei punti $P_1 \in \overline{p}, P_2 \in \overline{r}$ e $P_3 \in \overline{s}$ tali che $\{P_1, P_2, P_3\}$ sono proiettivamente equivalenti a $\{F_0, F_1, F_2\}$.

SOLUZIONE:

Osserviamo che, usando i minori 2×2 a segni alterni delle matrici si ottiene, per i vettori di giacitura di r ed s:

$$v_r = (1, 1, -2), v_s = (1, 1, -1).$$

(a) Sia $q : AX + BY + CZ + D = 0$ con, senza perdita di generalità,

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1$$

così che $n_q = (A, B, C)$. Abbiamo $n_p = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, quindi $q \perp p$ se e solo se

$$A + B + C = 0$$

mentre $q \not\perp r$ se e solo se $n_q \not\parallel v_r$, quindi se e solo se

$$(*) \quad r(\begin{pmatrix} A & B & C \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}) = 2.$$

Ora, l'angolo tra s e q è $\frac{\pi}{3}$ se e solo se

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{3}) = \frac{< n_q, v_s >}{\|n_q\| \|v_s\|} = \frac{A+B-C}{\sqrt{3}}$$

da cui

$$\frac{3}{2} = A + B - C.$$

Abbiamo allora, oltre alla condizione $(*)$, le seguenti condizioni

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A+B-C=\frac{3}{2} \\ A^2+B^2+C^2=1 \end{cases}.$$

Posto $B = t$ si ottiene $A = \frac{3}{4} - t, C = -\frac{3}{4}$ e $(\frac{3}{4} - t)^2 + t^2 + (\frac{3}{4})^2 = 1$, ovvero $16t^2 - 12t + 1 = 0$, che da $t = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{8}$ e quindi $A = \frac{3}{4} - \frac{3 \pm \sqrt{5}}{8}, B = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{8}, C = -\frac{3}{4}$ e $A - B = \mp \frac{\sqrt{5}}{4} \neq 0$, quindi $(*)$ è soddisfatta. Dunque i piani q richiesti sono quelli di equazioni

$$(3 \mp \sqrt{5})X + (3 \pm \sqrt{5})Y - 6Z + D' = 0, \text{ per ogni } D' \in \mathbb{R}.$$

(b) Osserviamo che $O \in r$ e sia $Q = Q(1, 0, 0) \in s$. Allora $r = S_{O,\langle v_r \rangle}, s = S_{Q,\langle v_s \rangle}$. Quindi un'isometria f con operatore unitario associato φ tale che $f(r) = s$ si otterrà con $f(O) = Q$ e $\varphi(\langle v_r \rangle) = \langle v_s \rangle$. Per fare questo, normalizziamo v_r e v_s e prendiamo due basi ortonormali che li contengono. Per esempio possiamo prendere

$$\{\frac{v_r}{\|v_r\|}, \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{30}}(1, -5, -2)\}$$

e

$$\{\frac{v_s}{\|v_s\|}, \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, -1)\}.$$

Se $\varphi : V \to V$ è definita da

$$\varphi(\frac{v_r}{\|v_r\|}) = \frac{v_s}{\|v_s\|}, \varphi(\frac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, 1)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1), \varphi(\frac{1}{\sqrt{30}}(1, -5, -2)) = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, -1))$$

e f è data da φ e dalla condizione $f(O) = Q$, allora $f(r) = s$.

(c) Dato che F_0, F_1, F_2 sono tre punti indipendenti, basterà scegliere i tre punti $P_1 \in \overline{p}, P_2 \in \overline{r}$ e $P_3 \in \overline{s}$ in modo che siano indipendenti. Infatti, fatto questo, esiste sempre una proiettività che manda, per esempio, P_1 in F_0, P_2 in F_1 e P_3 in F_2 (questo perché esiste una proiettività che manda cinque punti in posizione generale in cinque punti in posizione generale, quindi anche tre punti in posizione generale in tre punti in posizione generale).

Ora, usando le equazioni, possiamo prendere $P_1 = F_0 \in \overline{p}$, $P_2 = P_2[a, b, b, -2b] \in \overline{r}$ e $P_3 = P_3[c-d, c, d, -d] \in \overline{s}$ in modo che la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & b & -2b \\ c-d & c & d & -d \end{pmatrix}$$

abbia rango 3. Per esempio $P_2 = P_2[0, 1, 1, -2], P_3 = P_3[1, 1, 0, 0]$. ■

3. Siano $k, h \in \mathbb{R}$ e siano $\mathcal{C}_k$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$kX^2 + kY^2 + 2(1-k)XY + Y = 0.$$

e $\mathcal{D}_h$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$hX^2 + Y^2 - 1 = 0.$$

(a) Determinare per quali k, h si ha che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono non degeneri, semplicemente degeneri o doppiamente degeneri e sono (o no) a centro.

(b) Determinare un'isometria che trasforma $\mathcal{C}_k$ nella sua equazione canonica euclidea.

(c) Determinare i valori k e di h per cui $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono affinemente equivalenti.

SOLUZIONE:

(a) Le matrici di $\mathcal{C}_k$ sono

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & k & 1-k \\ \frac{1}{2} & 1-k & k \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} k & 1-k \\ 1-k & k \end{pmatrix}.$$

Abbiamo $\det(A) = -\frac{k}{4}, \det(A_0) = 2k - 1$, pertanto $\mathcal{C}_k$ è non degenere se e solo se $k \neq 0$, è semplicemente degenere se e solo se $k = 0$. Inoltre $\mathcal{C}_k$ è un'ellisse se e solo se $k > \frac{1}{2}$, é una parabola se e solo se $k = \frac{1}{2}$ ed é un'iperbole se e solo se $k < \frac{1}{2}$.

Le matrici di $\mathcal{D}_h$ sono

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B_0 = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo $\det(B) = -h, \det(B_0) = h$, pertanto pertanto $\mathcal{D}_h$ è non degenere se e solo se $h \neq 0$, è semplicemente degenere se e solo se $h = 0$. Inoltre $\mathcal{D}_h$ è un'ellisse se e solo se $h > 0$, é una parabola se e solo se $h = 0$ ed é un'iperbole se e solo se $h < 0$.

(b) Troviamo sia l'equazione canonica euclidea che quella affine (in vista di (c)) di $\mathcal{C}_k$.

Il polinomio caratteristico di A_0 è

$$\begin{vmatrix} k-T & 1-k \\ 1-k & k-T \end{vmatrix} = T^2 - 2kT + 2k - 1$$

e pertanto gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$ e, se $k \neq 1$, $\lambda_2 = 2k - 1$.

Per arrivare all'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}_k$ occorre distinguere i seguenti casi.

Caso 1: $k = 1$.

L'equazione è $X^2 + Y^2 + Y = 0$, da cui, con l'isometria

$$\begin{cases} X' = X \\ Y' = Y - \frac{1}{2} \end{cases}$$

si ottiene

$$X^2 + Y^2 - \frac{1}{4} = 0$$

ovvero, in forma canonica euclidea

$$\frac{X^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

e l'equazione canonica affine è $X^2 + Y^2 - 1 = 0$.

Supponiamo ora $k \neq 1$.

È facile vedere che una base di autovettori di A_0 è $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)\}$, pertanto operiamo con l'isometria

$$\begin{cases} X' = \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) \\ Y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y) \end{cases}$$

ottenendo

$$X^2 + (2k-1)Y^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{1}{\sqrt{2}}Y = 0.$$

da cui, con l'isometria

$$\begin{cases} X' = X - \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ Y' = Y \end{cases}$$

si ottiene

$$(*) \quad X^2 + (2k-1)Y^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}Y - \frac{1}{8} = 0.$$

Caso 2: $k = \frac{1}{2}$.

Abbiamo da $(*)$, $X^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}Y - \frac{1}{8} = 0$ ovvero, scambiando X ed Y, $Y^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{1}{8} = 0$, da cui, con l'isometria $\begin{cases} X' = X - \frac{\sqrt{2}}{8} \\ Y' = Y \end{cases}$ deduciamo l'equazione canonica euclidea

$$Y^2 - 2\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}X\right) = 0$$

e affine $Y^2 - X = 0$.
Supponiamo ora $k \neq 1, \frac{1}{2}$.
Con l'isometria $\begin{cases} X' = X \\ Y' = Y + \frac{1}{2\sqrt{2}(2k-1)} \end{cases}$ possiamo riscrivere $(*)$ come

$$(**) \quad X^2 + (2k-1)Y^2 - \frac{k}{4(2k-1)} = 0.$$

Caso 3: $k = 0$.
Da $(**)$ abbiamo l'equazione canonica euclidea e affine

$$X^2 - Y^2 = 0.$$

Supponiamo ora $k \neq 0, 1, \frac{1}{2}$.
Riscriviamo $(**)$ come

$$(***) \quad \frac{4(2k-1)}{k}X^2 + \frac{4(2k-1)^2}{k}Y^2 = 1.$$

Se $k > 0$ abbiamo $\frac{4(2k-1)^2}{k} > 0$, mentre $\frac{4(2k-1)}{k} \geq 0$ se e solo se $k \geq \frac{1}{2}$. Dunque abbiamo i casi seguenti.
Caso 4: $k > \frac{1}{2}, k \neq 1$.
Dato che $\sqrt{\frac{k}{4(2k-1)}} \geq \frac{\sqrt{k}}{2(2k-1)}$ se e solo se $k \geq 1$, deduciamo da $(***)$ che la forma canonica euclidea è

$$\frac{X^2}{\left(\sqrt{\frac{k}{4(2k-1)}}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\frac{\sqrt{k}}{2(2k-1)}\right)^2} = 1 \text{ se } k > 1$$

mentre, scambiando X e Y è

$$\frac{X^2}{\left(\frac{\sqrt{k}}{2(2k-1)}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{k}{4(2k-1)}}\right)^2} = 1 \text{ se } \frac{1}{2} < k < 1.$$

In entrambi i casi l'equazione canonica affine è $X^2 + Y^2 - 1 = 0$.
Caso 5: $0 < k < \frac{1}{2}$.
Abbiamo $\frac{4(2k-1)}{k} < 0, \frac{4(2k-1)^2}{k} > 0$ da cui, scambiando X ed Y, deduciamo da $(***)$ che la forma canonica euclidea è

$$\frac{X^2}{\left(\frac{\sqrt{k}}{2(2k-1)}\right)^2} - \frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{k}{4(1-2k)}}\right)^2} = 1$$

e l'equazione canonica affine è $X^2 - Y^2 - 1 = 0$.

Caso 6: $k < 0$.
Abbiamo $\frac{4(2k-1)}{k} > 0, \frac{4(2k-1)^2}{k} < 0$ da cui deduciamo da $(***)$ che la forma canonica euclidea è

$$\frac{X^2}{\left(\sqrt{\frac{k}{4(2k-1)}}\right)^2} - \frac{Y^2}{\left(\frac{\sqrt{-k}}{2(2k-1)}\right)^2} = 1$$

e l'equazione canonica affine è $X^2 - Y^2 - 1 = 0$.
(c) L'equazione canonica affine di $\mathcal{D}_h$ è

$$Y^2 = 1 \text{ se } h = 0, X^2 + Y^2 - 1 = 0 \text{ se } h > 0, X^2 - Y^2 - 1 = 0 \text{ se } h < 0.$$

Ne deduciano da (b) che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono affinemente equivalenti se e solo se $h > 0$ e $k > \frac{1}{2}$ oppure $h < 0$ e $k < \frac{1}{2}, k \neq 0$. ■