UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE210 - Geometria 2

a.a. 2023-2024

Prova scritta del 26-1-2024

TESTO

1. Sia k un numero reale. Sia V uno spazio vettoriale reale, sia $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ una sua base e sia $W = \langle e_1 + e_3, e_2 \rangle$.
(a) Mostrare che esiste un'unica forma bilineare simmetrica $b : V \times V \to \mathbb{R}$, con forma quadratica associata $q : V \to \mathbb{R}$, tale che

$$q(e_1) = 1, q(e_3) = 2, b(e_2, e_3) = k$$

e $\{e_1 + e_3, e_2\}$ è un base ortonormale per $b_{|W}$.
(b) Calcolare la matrice di b nella forma canonica di Sylvester e determinare i valori di k per i quali b definisce un prodotto scalare su V.
(c) Sia k tale che b definisce un prodotto scalare su V. Sia $T : V \to V$ un operatore che ha la stessa matrice di b (in una base opportuna). Determinare (se esiste) un operatore $T' : V \to V$ tale che $T'(e_2 - ke_1) = e_2 - ke_1$ e $T + T'$ è un operatore unitario.
(d) Sia k tale che b definisce un prodotto scalare su V. Calcolare il prodotto vettoriale $(e_1 + e_3) \wedge e_2$.
2. Sia $\mathbb{E}$ uno spazio euclideo di dimensione 3 e sia $\{O, i, j, k\}$ un suo sistema di coordinate cartesiane. Sia p il piano di $\mathbb{E}$ di equazione $X + Y + Z = 0$ e siano r ed s le rette di E di equazioni

$$r : \begin{cases} X + Y + Z = 0 \\ X - Y = 0 \end{cases}, \quad s : \begin{cases} X + Z = 1 \\ X - Y = 1 \end{cases}.$$

(a) Determinare (se esistono) tutte i piani q che soddisfano tutte le seguenti condizioni : q è perpendicolare a p, q non è perpendicolare ad r e l'angolo tra s e q è $\frac{\pi}{3}$.
(b) Determinare (se esiste) un'isometria $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ tale che $f(r) = s$.
(c) Considerato $\mathbb{E} \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ siano $\overline{p}, \overline{r}$ e $\overline{s}$ le chiusure proiettive di p, r ed s. Siano F_0, F_1, F_2 i punti fondamentali $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$. Determinare (se esistono) dei punti $P_1 \in \overline{p}, P_2 \in \overline{r}$ e $P_3 \in \overline{s}$ tali che $\{P_1, P_2, P_3\}$ sono proiettivamente equivalenti a $\{F_0, F_1, F_2\}$.
3. Siano $k, h \in \mathbb{R}$ e siano $\mathcal{C}_k$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$kX^2 + kY^2 + 2(1 - k)XY + Y = 0.$$

e $\mathcal{D}_h$ la conica (affine o euclidea) di equazione

$$hX^2 + Y^2 - 1 = 0.$$

(a) Determinare per quali k, h si ha che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono non degeneri, semplicemente degeneri o doppiamente degeneri e sono (o no) a centro.
(b) Determinare un'isometria che trasforma $\mathcal{C}_k$ nella sua equazione canonica euclidea.
(c) Determinare i valori k e di h per cui $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono affinemente equivalenti.