UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE210 - Geometria 2

a.a. 2023-2024

Prima prova di esonero

TESTO E SOLUZIONI

1. Sia K un campo di caratteristica diversa da 2 e sia $k \in K$. Sia V un K-spazio vettoriale e sia $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ una sua base.

(a) Mostrare che esiste un'unica forma bilineare simmetrica $b : V \times V \to K$ tale che, se $q : V \to K$ è la forma quadratica associata, allora si ha

$$q(e_1) = k, q(e_2) = -1, q(e_3) = -2, q(e_1 - e_2) = 0, b(e_1, e_3) = 0$$

e il coefficiente di Fourier di e_3 rispetto a e_2 è 1.

(b) Sia $K = \mathbb{R}$. Calcolare la matrice di b nella forma canonica di Sylvester.

(c) Sia $K = \mathbb{C}$. Trovare una base diagonalizzante b e scrivere la matrice di b nella forma canonica.

SOLUZIONE:

(a) Per ipotesi abbiamo

$$b(e_1, e_1) = q(e_1) = k, b(e_2, e_2) = q(e_2) = -1 \text{ e } b(e_3, e_3) = q(e_3) = -2.$$

Inoltre

$$0 = q(e_1 - e_2) = b(e_1 - e_2, e_1 - e_2) = b(e_1, e_1) - 2b(e_1, e_2) + b(e_2, e_2) = k - 1 - 2b(e_1, e_2)$$

da cui

$$b(e_1, e_2) = \frac{k-1}{2}.$$

Inoltre

$$1 = a_{e_2}(e_3) = \frac{b(e_3, e_2)}{b(e_2, e_2)} = -b(e_3, e_2)$$

e quindi

$$b(e_3, e_2) = -1.$$

Questo definisce univocamente una forma bilineare simmetrica b su V tale che

$$M_e(b) = \begin{pmatrix} k & \frac{k-1}{2} & 0 \\ \frac{k-1}{2} & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(b) e (c) Sia $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Siano $x, y, z \in K$ e sia $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$.
Si ha $b(e_2, e_2) = -1$, quindi e_2 non è isotropo. Poniamo

$$f_1 = e_2.$$

Cerchiamo $v \in V$ non isotropo tale che $v \perp f_1$. Abbiamo

$$0 = b(f_1, v) = b(e_2, v) = \frac{k-1}{2}x - y - z$$

se e solo se

$$(*) \qquad z = \frac{k-1}{2}x - y.$$

Scelto $x = 0, y = 1, z = -1$ si ottiene $e_2 - e_3$. Inoltre

$$q(e_2 - e_3) = -1.$$

Quindi il vettore

$$f_2 = e_2 - e_3$$

non è isotropo e $f_2 \perp f_1$.
Ora cerchiamo $v \in V$ tale che $v \perp f_1$ e $v \perp f_2$ (non serve sapere se è isotropo o no perché lo spazio ha dimensione 3). Dalla condizione $(*)$ deduciamo che $v = xe_1 + ye_2 + (\frac{k-1}{2}x - y)e_3$.
Inoltre $v \perp f_2$ se e solo se (sfruttando il fatto che $b(v, e_2) = 0$)

$$0 = b(v, f_2) = b(v, e_2 - e_3) = -b(v, e_3) = -b(xe_1 + ye_2 + (\frac{k-1}{2}x - y)e_3, e_3) = -y + (k-1)x$$

da cui, per esempio, possiamo scegliere $x = 1, y = k-1, z = \frac{k-1}{2}x - y = -\frac{k-1}{2}$, ottenendo

$$f_3 = e_1 + (k-1)e_2 - \frac{k-1}{2}e_3.$$

Allora

$$f = \{f_1, f_2, f_3\} \text{ è una base di } V \text{ che diagonalizza } b$$

in quanto sono un insieme ortogonale di 3 vettori.

Inoltre (sfruttando il fatto che $b(f_3, e_2) = 0$)

$$q(f_3) = b(f_3, f_3) = b(f_3, e_1 + (k-1)e_2 - \frac{k-1}{2}e_3) = b(f_3, e_1 - \frac{k-1}{2}e_3) = \frac{k^2+1}{2}$$

quindi

$$(**) \qquad M_f(b) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k^2+1}{2} \end{pmatrix}.$$

Se $K = \mathbb{R}$, dato che $\frac{k^2+1}{2} > 0$ per ogni k, deduciamo che la forma canonica di Sylvester di b è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e questo conclude (b).

Se $K = \mathbb{C}$ abbiamo che $\frac{k^2+1}{2} = 0$ se e solo se $k = \pm i$. Quindi otteniamo da $(**)$ che, se $k \neq \pm i$, una base diagonalizzante b è

$$\{\frac{1}{\sqrt{-1}}f_1, \frac{1}{\sqrt{-1}}f_2, \frac{1}{\sqrt{\frac{k^2+1}{2}}}f_3\} = \{-if_1, -if_2, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k^2+1}}f_3\} =$$

$$= \{-ie_2, -ie_2 + ie_3, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k^2+1}}(e_1 + (k-1)e_2 - \frac{k-1}{2}e_3)\}$$

e la matrice di b nella forma canonica è I_3.

Invece, se $k = \pm i$, abbiamo da $(**)$ che una base diagonalizzante b è

$$\{\frac{1}{\sqrt{-1}}f_1, \frac{1}{\sqrt{-1}}f_2, f_3\} = \{-ie_2, -ie_2 + ie_3, e_1 + (k-1)e_2 - \frac{k-1}{2}e_3)\}$$

e la matrice di b nella forma canonica è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e questo conclude (c). ■

2. Sia $k \in \mathbb{R}$, sia V uno spazio vettoriale reale, sia $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ una sua base e sia $v = e_1 + e_3$. Sia $b : V \times V \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica tale che

$$M_e(b) = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare per quali k si ha che b definisce un prodotto scalare su V.

Considerato ora V come spazio vettoriale euclideo con il prodotto scalare trovato in (a):

(b) Calcolare $v \wedge e_1$.

(c) Fissato un valore di k per il quale b definisce un prodotto scalare su V, trovare tutti gli operatori unitari $T : V \to V$ tali che $T(e_1) = e_1$.

SOLUZIONE:

(a) Usiamo il criterio dei minori principali:

$$|\,1\,| = 1, \begin{vmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{vmatrix} = 1 - k^2, \begin{vmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix} = k(1-k^2)$$

da cui si ottiene che b definisce un prodotto scalare su V se e solo se $1-k^2 > 0, k(1-k^2) > 0$, ovvero se e solo se $0 < k < 1$.

(b) Assumiamo dunque $0 < k < 1$. Osserviamo che la base e non è ortonormale, in quanto $b(e_1, e_2) = k \neq 0$. Dunque, per calcolare $v \wedge e_1$, dobbiamo esprimerli in una base ortonormale. Ortonormalizziamo e. Dato che $q(e_1) = 1$, possiamo scegliere

$$f_1 = e_1.$$

Dato che $b(e_1, e_3) = 0$ e $q(e_3) = k > 0$, scegliamo

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{k}} e_3.$$

Ora sia $w = xe_1 + ye_2 + ze_3$. Abbiamo

$$0 = b(f_1, w) = b(e_1, xe_1 + ye_2 + ze_3) = x + ky$$

e

$$0 = b(f_2, w) = b(e_3, xe_1 + ye_2 + ze_3) = kz$$

da cui deduciamo che $x = -ky, z = 0$. Posto $y = 1$ abbiamo $w = -ke_1 + e_2$ e

$$q(w) = b(-ke_1 + e_2, -ke_1 + e_2) = 1 - k^2 > 0.$$

Allora posto

$$f_3 = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}(-ke_1 + e_2)$$

otteniamo una base ortonormale $f = \{f_1, f_2, f_3\}$.
Ora $v = e_1 + e_3 = f_1 + \sqrt{k}f_2$ ha coordinate $(1, \sqrt{k}, 0)$, mentre $e_1 = f_1$ ha coordinate $(1, 0, 0)$ nella base f. Dunque le coordinate di $v \wedge e_1$ nella base f sono date dai minori 2x2 a segni alterni della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{k} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$v \wedge e_1 = -\sqrt{k}f_3 = -\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{1-k^2}}(-ke_1 + e_2).$$

(c) Scegliamo $k = \frac{1}{2}$, in modo che la base ortonormale scelta è $f = \{f_1, f_2, f_3\}$ con

$$f_1 = e_1, f_2 = \sqrt{2}e_3, f_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}(-\frac{1}{2}e_1 + e_2).$$

Sia ora $T : V \to V$ un operatore unitario tale che $T(e_1) = e_1$, dunque $T(f_1) = f_1$. Quindi T sarà univocamente determinato da $T(f_2)$ e $T(f_3)$. Poniamo

$$T(f_2) = \alpha f_1 + af_2 + bf_3, T(f_3) = \beta f_1 + cf_2 + df_3.$$

Sappiamo che T è unitario se e solo se $T(f) = \{T(f_1), T(f_2), T(f_3)\}$ è una base ortonormale. Abbiamo quindi le seguenti condizioni (equivalenti al fatto che T è unitario):

$$< T(f_1), T(f_2) >=< T(f_1), T(f_3) >=< T(f_2), T(f_3) >= 0$$

e

$$< T(f_2), T(f_2) >=< T(f_3), T(f_3) >= 1$$

che si traducono in

$$\alpha = 0, \beta = 0, ac + bd = 0, a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1.$$

Ne concludiamo che tutti gli operatori unitari $T : V \to V$ tali che $T(e_1) = e_1$ sono quelli che hanno matrice, nella base f,

$$M_f(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & b & d \end{pmatrix}$$

con $ac + bd = 0, a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1$ (ovvero che la matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ è ortogonale).

Osserviamo che la stessa conclusione si poteva anche ottenere, più astrattamente, considerando il sottospazio $W = \langle f_2, f_3 \rangle$ e la restrizione di T a W. ∎

3. Sia E uno spazio euclideo di dimensione 3 e sia $\{O, i, j, k\}$ un suo riferimento con coordinate cartesiane X, Y, Z. Sia $P = P(1, 0, 1) \in E$, siano p, p' i piani di equazioni

$$p : X - Y + Z = 1, \quad p' : X + Y + Z = 1$$

e sia r la retta di E di equazioni

$$r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = -t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

(a) Determinare (se esistono) tutte le rette r' di E che soddisfano tutte e tre le seguenti condizioni: r' ha distanza $\frac{1}{\sqrt{2}}$ da $p \cap p'$, $P \in r'$ e r' forma un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con r.

(b) Determinare (se esistono) tutte le rette r' che soddisfano tutte e tre le seguenti condizioni: r' è perpendicolare ad r, r' è perpendicolare a $p \cap p'$ e r' interseca r nel punto $Q = Q(0, 1, 0)$.

(c) Determinare (se esistono) tutti i piani p'' di E che soddisfano tutte e tre le seguenti condizioni: p'' è perpendicolare ad p, p'' contiene r e p'' forma un angolo di $\frac{\pi}{3}$ con p'.

SOLUZIONE:

(a) Si ha

$$p \cap p' : \begin{cases} X - Y + Z = 1 \\ X + Y + Z = 1 \end{cases}$$

quindi, un vettore di direzione di $p \cap p'$, è dato, nelle coordinate definite dalla base $\{i, j, k\}$, dai minori 2x2 a segni alterni della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ovvero $(-2, 0, 2)$. Prendiamo quindi

$$v_{p \cap p'} = (-1, 0, 1).$$

Sia $Q = Q(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) \in p \cap p'$ e sia $v_{r'} = (l, m, n)$ un vettore di direzione di r' e prendiamo P come punto di r'. Si ha

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{2} & 0 & 1 - \frac{1}{2} \\ l & m & n \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = m$$

Dunque
$$\frac{1}{\sqrt{2}} = d(r', p \cap p') = \frac{|m|}{\sqrt{m^2 + (l+n)^2 + m^2}}$$
da cui deduciamo che
$$\frac{1}{2} = \frac{m^2}{2m^2 + (l+n)^2}$$
ovvero che
$$(l+n)^2 = 0$$
e quindi
$$n = -l.$$
Dato che $v_r = (-1, 1, -1)$ abbiamo che
$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{< v_r, v_{r'} >}{||v_r|| ||v_{r'}||} = \frac{-l + m - n}{\sqrt{3}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} = \frac{m}{\sqrt{3}\sqrt{2l^2 + m^2}}$$
da cui deduciamo che
$$\frac{1}{2} = \frac{m^2}{3(2l^2 + m^2)}$$
ovvero che
$$6l^2 + m^2 = 0$$
e quindi $l = m = 0$. Ma allora anche $n = 0$, contraddicendo il fatto che $v_{r'} \neq 0$. Se ne deduce che una tale retta r' non esiste.

(b) Sia $v_{r'} = (l, m, n)$ un vettore di direzione di r'. Abbiamo per ipotesi
$$< v_{r'}, v_r > = < v_{r'}, v_{p \cap p'} > = 0$$
ovvero, usando $v_r = (-1, 1, -1), v_{p \cap p'} = (-1, 0, 1)$, abbiamo
$$0 = < (l, m, n), (-1, 1, -1) > = -l + m - n$$
e
$$0 = < (l, m, n), (-1, 0, 1) > = -l + n$$
da cui deduciamo che $m = 2l, n = l$ e quindi che $v_{r'} = (l, 2l, l) = l(1, 2, 1)$. Dunque possiamo prendere anche $v_{r'} = (1, 2, 1)$. Dato che $Q = Q(0, 1, 0) \in r'$, deduciamo che r' ha equazioni parametriche
$$r' : \begin{cases} x = t \\ y = 2t + 1 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Infine abbiamo che $Q = r \cap r'$: infatti sicuramente $Q \in r \cap r'$ e se ci fosse un altro punto diverso da Q avremmo che $r' = r$, quindi in particolare avremmo che v_r e $v_{r'}$ sono paralleli, contraddizione. Quindi la retta r' trovata soddisfa tutte e tre condizioni in (b).
(c) Sia $p'' : AX + BY + CZ + D = 0$. Dato che $r \subset p''$ abbiamo che

$$A(1-t) + Bt + C(1-t) + D = 0$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$, ovvero

$$(-A + B - C)t + A + C + D = 0$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$, ovvero

$$-A + B - C = 0, A + C + D = 0$$

da cui deduciamo che

$$C = B - A, D = -B.$$

In particolare ne segue che p'' è perpendicolare a p: infatti

$$< n_{p''}, n_p >= \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{3}} < (A, B, C), (1, -1, 1) >= \frac{A - B + C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{3}} = 0.$$

Infine abbiamo $n_{p'} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, da cui

$$\frac{1}{2} = \cos(\frac{\pi}{3}) =< n_{p''}, n_{p'} >= \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{3}} < (A, B, C), (1, 1, 1) >=$$

$$= \frac{A + B + C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{3}} = \frac{2B}{\sqrt{A^2 + B^2 + (B - A)^2}\sqrt{3}}$$

da cui

$$\frac{1}{4} = \frac{4B^2}{3(A^2 + B^2 + (B - A)^2)}$$

ovvero

$$(*) \qquad 3A^2 - 3AB - 5B^2 = 0.$$

Osserviamo che $B \neq 0$, altrimenti $B = 0$, $A^2 = 0$, da cui $A = 0$ e quindi $C = 0$, contraddizione. Allora, posto $x = \frac{A}{B}$, $(*)$ diventa $3x^2 - 3x - 5 = 0$, le cui soluzioni sono $x = \frac{3 \pm \sqrt{69}}{6}$. Quindi deduciamo che $A = \frac{3 \pm \sqrt{69}}{6} B, C = (1 - \frac{3 \pm \sqrt{69}}{6})B, D = -B$. Pertanto, osservando che $B \neq 0$, ci sono esattamente due piani p'' di E che soddisfano le condizioni in (c), di equazioni

$$\frac{3 \pm \sqrt{69}}{6} X + Y + (1 - \frac{3 \pm \sqrt{69}}{6})Z - 1 = 0. \blacksquare$$