UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE210 - Geometria 2

a.a. 2023-2024

Prima prova di esonero

TESTO

1. Sia K un campo di caratteristica diversa da 2 e sia $k \in K$. Sia V un K-spazio vettoriale e sia $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ una sua base.
(a) Mostrare che esiste un'unica forma bilineare simmetrica $b : V \times V \to K$ tale che, se $q : V \to K$ è la forma quadratica associata, allora si ha

$$q(e_1) = k, q(e_2) = -1, q(e_3) = -2, q(e_1 - e_2) = 0, b(e_1, e_3) = 0$$

e il coefficiente di Fourier di e_3 rispetto a e_2 è 1.
(b) Sia $K = \mathbb{R}$. Calcolare la matrice di b nella forma canonica di Sylvester.
(c) Sia $K = \mathbb{C}$. Trovare una base diagonalizzante b e scrivere la matrice di b nella forma canonica.
2. Sia $k \in \mathbb{R}$, sia V uno spazio vettoriale reale, sia $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ una sua base e sia $v = e_1 + e_3$. Sia $b : V \times V \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica tale che

$$M_e(b) = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare per quali k si ha che b definisce un prodotto scalare su V.
Considerato ora V come spazio vettoriale euclideo con il prodotto scalare trovato in (a):
(b) Calcolare $v \wedge e_1$.
(c) Fissato un valore di k per il quale b definisce un prodotto scalare su V, trovare tutti gli operatori unitari $T : V \to V$ tali che $T(e_1) = e_1$.

3. Sia E uno spazio euclideo di dimensione 3 e sia $\{O, i, j, k\}$ un suo riferimento con coordinate cartesiane X, Y, Z. Sia $P = P(1, 0, 1) \in E$, siano p, p' i piani di equazioni

$$p : X - Y + Z = 1, \quad p' : X + Y + Z = 1$$

e sia r la retta di E di equazioni

$$r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = -t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

(a) Determinare (se esistono) tutte le rette r' di E che soddisfano tutte e tre le seguenti condizioni: r' ha distanza $\frac{1}{\sqrt{2}}$ da $p \cap p'$, $P \in r'$ e r' forma un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con r.
(b) Determinare (se esistono) tutte le rette r' che soddisfano tutte e tre le seguenti condizioni: r' è perpendicolare ad r, r' è perpendicolare a $p \cap p'$ e r' interseca r nel punto $Q = Q(0, 1, 0)$.
(c) Determinare (se esistono) tutti i piani p'' di E che soddisfano tutte e tre le seguenti condizioni: p'' è perpendicolare ad p, p'' contiene r e p'' forma un angolo di $\frac{\pi}{3}$ con p'.