UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE210 - Geometria 2

a.a. 2023-2024

Seconda prova di esonero

TESTO E SOLUZIONI

1. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia V uno spazio vettoriale con base $e = \{e_1, e_2, e_3\}$. Sia $T : V \to V$ un operatore lineare tale che

$$T(e_1 - e_2) = (1-k)e_1 - e_2 - e_3, T(e_1) = e_1 + e_2, T(e_1 + e_3) = e_1 + 2e_2 + ke_3.$$

(a) Determinare se esiste un prodotto scalare su V tale che T è un operatore unitario.

Supponiamo ora che V è euclideo, $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ è ortogonale e $\|e_i\| = 2, 1 \le i \le 3$.

(b) Determinare tutti i valori di k per i quali T è un operatore simmetrico.

(c) Per tutti i valori di k trovati in (b), determinare una matrice $M \in O(3)$ che diagonalizza T.

SOLUZIONE:

(a) Scriviamo la matrice di T nella base e. Si ha

$$T(e_2) = T(e_1) - (1-k)e_1 + e_2 + e_3 = ke_1 + 2e_2 + e_3$$

$$T(e_3) = e_1 + 2e_2 + ke_3 - T(e_1) = e_2 + ke_3$$

da cui

$$M_e(T) = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

Supponiamo che esista un prodotto scalare su V tale che T è un operatore unitario. Ne seguirebbe che $\det(T) = \pm 1$ e ogni autovalore reale di T è ± 1. Si ha

$$\det(T) = -(k-1)^2 = \pm 1 \text{ se e solo se } k = 0, 2.$$

Dunque, resta da verificare i casi $k = 0, 2$. Il polinomio caratteristico di T è

$$(*) \quad P_T(t) = -t^3 + (3+k)t^2 - (2k+1)t - k^2 + 2k - 1.$$

Se $k=0$ abbiamo $P_T(t)=-t^3+3t^2-t-1$ che ha soluzioni 1 e $1\pm\sqrt{2}$. Quindi nel caso $k=0$ si ha che T non è un operatore unitario. Se $k=2$ abbiamo $P_T(t)=-t^3+5t^2-5t-1$ che, essendo di grado dispari, ha sicuramente una soluzione reale λ. Se fosse $\lambda=\pm 1$ avremmo che $P_T(\pm 1)=0$. Ma $P_T(1)=-2, P_T(-1)=10$. Ne segue che $\lambda\neq\pm 1$ e quindi anche nel caso $k=2$ si ha che T non è un operatore unitario. Si conclude che T non è mai un operatore unitario.

(b) Come è noto, T è un operatore simmetrico se e solo se la sua matrice, in una base ortonormale, è simmetrica. Dato che $e=\{e_1,e_2,e_3\}$ è ortogonale e $\|e_i\|=2, 1\leq i\leq 3$, posto

$$e_i'=\frac{1}{\|e_i\|}e_i=\frac{1}{2}e_i, 1\leq i\leq 3$$

abbiamo che $e'=\{e_1',e_2',e_3'\}$ è ortonormale. Da quanto abbiamo visto sopra si ha che

$$T(e_1')=\frac{1}{2}T(e_1)=\frac{1}{2}(e_1+e_2)=e_1'+e_2', T(e_2')=\frac{1}{2}T(e_2)=\frac{1}{2}(ke_1+2e_2+e_3)=ke_1'+2e_2'+e_3'$$

e

$$T(e_3')=\frac{1}{2}T(e_3)=\frac{1}{2}(e_2+ke_3)=e_2'+ke_3'$$

e pertanto

$$M_{e'}(T)=\begin{pmatrix}1 & k & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & k\end{pmatrix}$$

che è simmetrica se e solo se $k=1$.

(c) Posto allora $k=1$, il polinomio caratteristico di T è dato da $(*)$:

$$P_T(t)=-t^3+4t^2-3t$$

e quindi gli autovalori di T sono $\lambda_1=0, \lambda_2=1, \lambda_3=3$. I corrrispondenti autovettori sono dati dalle soluzioni dei sistemi

$$\begin{pmatrix}1-\lambda_i & 1 & 0\\ 1 & 2-\lambda_i & 1\\ 0 & 1 & 1-\lambda_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

per $i=1,2,3$, ovvero dei sistemi

$$\begin{cases}(1-\lambda_i)x+y=0\\ x+(2-\lambda_i)y+z=0\\ y+(1-\lambda_i)z=0\end{cases}$$

che ha soluzioni $x = 1, y = -1, z = 1$ per $i = 1$, $x = -1, y = 0, z = 1$ per $i = 2$ e $x = 1, y = 2, z = 1$ per $i = 3$. Pertanto gli autovettori normalizzati, messi in colonna, danno la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \in O(3)$$

che diagonalizza T. ■

2. Sia $k \in \mathbb{R}$. Nello spazio affine reale $\mathbb{A}^4$ con coordinate X, Y, Z, W, consideriamo la retta r di equazione

$$r : \begin{cases} X - Z + W = 1 \\ X - Z = 2 \\ Y = 3 \end{cases}$$

e il piano p_k di equazione

$$p_k : \begin{cases} X + kY - Z + W = 1 \\ X - Z = 2 \end{cases}.$$

(a) Determinare un'affinità $f : \mathbb{A}^4 \to \mathbb{A}^4$ tale che $f(r) \subset p_k$.

Sia ora $\mathbb{A}^4 \subset \mathbb{P}^4$ con iperpiano all'infinito H_0 di equazione $X_0 = 0$ e sia V=$\mathbb{R}^5$ (in modo che $\mathbb{P}^4$=$\mathbb{P}$(V)).

(b) Determinare due sottospazi W, U di V tali che $\overline{r}$ =$\mathbb{P}$(W), $\overline{p}_k$ =$\mathbb{P}$(U).

(c) Determinare per quali i valori di k esiste una retta s di $\mathbb{A}^4$, passante per l'origine e tale che $L(\overline{r}, \overline{s}) = \overline{p}_k$.

SOLUZIONE:

(a) Calcoliamo le giaciture di r e p_k. Si ha

$$\text{giac}(r) : \begin{cases} X - Z + W = 0 \\ X - Z = 0 \\ Y = 0 \end{cases}$$

ovvero $Y = W = 0, Z = X$, quindi è costituita da tutti i vettori di coordinate $(X, 0, X, 0) = X(1, 0, 1, 0)$, ovvero $V_1 = \text{giac}(r) = \langle E_1 + E_3 \rangle$. Analogamente

$$\text{giac}(p_k) : \begin{cases} X + kY - Z + W = 0 \\ X - Z = 0 \end{cases}$$

ovvero $Z = X, W = -kY$, quindi è costituita da tutti i vettori di coordinate $(X, Y, X, -kY) = X(1, 0, 1, 0) + Y(0, 1, 0, -k)$, ovvero $V_2 = \text{giac}(p_k) = \langle E_1 + E_3, E_2 - kE_4 \rangle$.

Ne deduciamo che r e p_k sono paralleli. Preso un punto $Q \in r$ si ha che $r = S_{Q,V_1}$. Se $f : \mathbb{A}^4 \to \mathbb{A}^4$ è un'affinità con isomorfismo associato φ, si avrà allora che

$$f(r) = f(S_{Q,V_1}) = S_{f(Q),\varphi(V_1)}.$$

Sia $Q' \in p_k$. Per avere che $S_{f(Q),\varphi(V_1)} \subset p_k = S_{Q',V_2}$ è sufficiente per esempio che $f(Q) = Q'$ e $\varphi(V_1) \subset V_2$. Essendo $V_1 \subset V_2$ possiamo scegliere allora $\varphi = \mathrm{Id}$ e quindi la traslazione f di vettore $\overrightarrow{QQ'}$ sarà tale che $f(r) \subset p_k$.

(b) Le equazioni delle chiusure proiettive sono

$$\overline{r} : \begin{cases} X_1 - X_3 + X_4 = X_0 \\ X_1 - X_3 = 2X_0 \\ X_2 = 3X_0 \end{cases}, \overline{p}_k : \begin{cases} X_1 + kX_2 - X_3 + X_4 = X_0 \\ X_1 - X_3 = 2X_0 \end{cases}.$$

Sia W il sottospazio di V definito dal sistema lineare omogeneo di $\overline{r}$, ovvero

$$W = \{(v_0, \ldots, v_4) \in V : v_1 - v_3 + v_4 - v_0 = 0, v_1 - v_3 - 2v_0 = 0, v_2 - 3v_0 = 0\}.$$

Si ha che un punto $[v] = [v_0, \ldots, v_4] \in \overline{r}$ se e solo se $v_1 - v_3 + v_4 - v_0 = 0, v_1 - v_3 - 2v_0 = 0, v_2 - 3v_0 = 0$ se e solo se $v \in W$. Quindi $\overline{r} =\mathbb{P}(\mathrm{W})$. Analogamente se

$$U = \{(v_0, \ldots, v_4) \in V : v_1 + kv_2 - v_3 + v_4 - v_0 = 0, v_1 - v_3 - 2v_0 = 0\}$$

allora $\overline{p}_k =\mathbb{P}(\mathrm{U})$.

(c) Se esiste una retta s di $\mathbb{A}^4$, passante per l'origine e tale che $L(\overline{r}, \overline{s}) = \overline{p}_k$, allora $\overline{s} \subset L(\overline{r}, \overline{s}) = \overline{p}_k$, quindi anche

$$s = \overline{s} \cap (\mathbb{P}^4 \setminus H_0) \subset \overline{p}_k \cap (\mathbb{P}^4 \setminus H_0) = p_k.$$

Ma s passa per l'origine che non sta in p_k, quindi una tale s non esiste. ∎

3. Siano $k, h \in \mathbb{R}$ e siano $\mathcal{C}_k$ la conica (affine reale o euclidea) di equazione

$$(k + 1)X^2 + 2\sqrt{2}XY + kY^2 + 2 = 0$$

e $\mathcal{D}_h$ la conica (affine reale o euclidea) di equazione

$$hX^2 + hY^2 - X = 0.$$

(a) Determinare per quali k, h si ha che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono non degeneri, semplicemente degeneri o doppiamente degeneri e sono ellissi, iperboli o parabole.

(b) Determinare l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}_k$.

(c) Determinare i valori k e di h per cui $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono affinemente equivalenti (nel caso affine reale) o congruenti (nel caso euclideo).

SOLUZIONE:

(a) Le matrici di $\mathcal{C}_k$ sono

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & k+1 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & k \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} k+1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & k \end{pmatrix}.$$

Abbiamo $\det(A) = 2k^2 + 2k - 4, \det(A_0) = k^2 + k - 2$, pertanto $\mathcal{C}_k$ è non degenere se e solo se $k \neq -2, 1$, è semplicemente degenere se e solo se $k = -2, 1$. Inoltre $\mathcal{C}_k$ è un'ellisse se e solo se $k < -2$ o $k > 1$, é una parabola se e solo se $k = -2, 1$ ed é un'iperbole se e solo se $-2 < k < 1$.

Osserviamo che, affinché $\mathcal{D}_h$ sia una conica, si dovrà avere che $h \neq 0$. Le matrici di $\mathcal{D}_h$ sono

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & h & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}, B_0 = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}.$$

Abbiamo $\det(B) = -\frac{h}{4} \neq 0, \det(B_0) = h^2 > 0$, pertanto $\mathcal{D}_h$ è un'ellisse non degenere per ogni h.

(b) Il polinomio caratteristico di A_0 è

$$\begin{vmatrix} k+1-T & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & k-T \end{vmatrix} = T^2 - (2k+1)T + k^2 + k - 2$$

e pertanto gli autovalori sono $\lambda_1 = k - 1$ e $\lambda_2 = k + 2$.

Come è noto, con l'isometria associata ad una base ortonormale di autovalori, l'equazione di $\mathcal{C}_k$ diventa

$$(*) \quad (k-1)X^2 + (k+2)Y^2 + 2 = 0.$$

Per arrivare all'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}_k$ occorre distinguere i seguenti casi.

Caso 1: $k = 1$.

Da $(*)$ si ottiene $3Y^2 + 2 = 0$, ovvero, in forma canonica euclidea

$$Y^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = 0.$$

Caso 2: $k = -2$.

Da $(*)$ si ottiene $-3X^2 + 2 = 0$, ovvero, scambiando X e Y, $-3Y^2 + 2 = 0$, quindi, in forma canonica euclidea,

$$Y^2 - \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = 0.$$

Caso 3: $k \neq -2, 1$.

Dividendo per 2 in $(*)$ otteniamo

$$(**) \quad \frac{X^2}{\frac{2}{k-1}} + \frac{Y^2}{\frac{2}{k+2}} + 1 = 0.$$

Caso 3A: $k < -2$.

Abbiamo $k + 2 < 0, k - 1 < 0$ quindi possiamo riscrivere $(**)$ come

$$-\frac{X^2}{\frac{2}{1-k}} - \frac{Y^2}{\frac{2}{-k-2}} + 1 = 0$$

ovvero come

$$\frac{X^2}{\frac{2}{1-k}} + \frac{Y^2}{\frac{2}{-k-2}} - 1 = 0.$$

Dato che $\frac{2}{1-k} \leq \frac{2}{-k-2}$, scambiando X ed Y deduciamo la forma canonica euclidea

$$\frac{X^2}{(\sqrt{\frac{2}{-k-2}})^2} + \frac{Y^2}{(\sqrt{\frac{2}{1-k}})^2} = 1.$$

In particolare, se $k < -2$, $\mathcal{C}_k$ ha punti reali.

Caso 3B: $-2 < k < 1$.

Abbiamo $k + 2 > 0, k - 1 < 0$ e possiamo riscrivere $(**)$ come

$$-\frac{X^2}{\frac{2}{1-k}} + \frac{Y^2}{\frac{2}{k+2}} + 1 = 0$$

ovvero come

$$\frac{X^2}{\frac{2}{1-k}} - \frac{Y^2}{\frac{2}{k+2}} - 1 = 0$$

da cui deduciamo la forma canonica euclidea

$$\frac{X^2}{(\sqrt{\frac{2}{1-k}})^2} - \frac{Y^2}{(\sqrt{\frac{2}{k+2}})^2} = 1.$$

Caso 3C: $k > 1$.

Abbiamo $k + 2 > 0, k - 1 > 0$. Dato che $\frac{2}{k-1} \geq \frac{2}{k+2}$, deduciamo da $(**)$ la forma canonica euclidea

$$\frac{X^2}{(\sqrt{\frac{2}{k-1}})^2} + \frac{Y^2}{(\sqrt{\frac{2}{k+2}})^2} = -1.$$

In particolare, se $k > 1$, $\mathcal{C}_k$ non ha punti reali.

(c) Osserviamo che $\mathcal{D}_h$ è un'ellisse non degenere a punti reali, dato che $(0,0) \in \mathrm{Supp}(\mathcal{D}_h)$. Quindi, affinché $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ siano affinemente equivalenti (nel caso affine reale) o congruenti (nel caso euclideo), anche $\mathcal{C}_k$ dovrà essere un'ellisse non degenere a punti reali. Dalla forma canonica euclidea ottenuta in (b) ne deduciamo che $k < -2$. Dal teorema di classificazione delle coniche affini ne segue che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono affinemente equivalenti se e solo se $k < -2$. Per verificare se $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono congruenti, scriviamo la forma canonica euclidea di $\mathcal{D}_h$. Con l'isometria

$$\begin{cases} X' = X + \frac{1}{2h} \\ Y' = Y \end{cases}$$

si ottiene

$$hX^2 + hY^2 - \frac{1}{4h} = 0$$

ovvero

$$4h^2X^2 + 4h^2Y^2 - 1 = 0$$

e quindi la forma canonica euclidea di $\mathcal{D}_h$ è

$$\frac{X^2}{(\frac{1}{2h})^2} + \frac{Y^2}{(\frac{1}{2h})^2} = 1.$$

Pertanto se $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono congruenti si ha, dal caso 3A, che

$$\sqrt{\frac{2}{-k-2}} = \frac{1}{2h}, \sqrt{\frac{2}{1-k}} = \frac{1}{2h}$$

da cui segue che $\sqrt{\frac{2}{-k-2}} = \sqrt{\frac{2}{1-k}}$, ovvero che $1 - k = -k - 2$, contraddizione. Quindi $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ non sono mai congruenti. ∎