UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GE210 - Geometria 2

a.a. 2023-2024

Seconda prova di esonero

TESTO

1. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia V uno spazio vettoriale con base $e = \{e_1, e_2, e_3\}$. Sia $T : V \to V$ un operatore lineare tale che

$$T(e_1 - e_2) = (1-k)e_1 - e_2 - e_3, T(e_1) = e_1 + e_2, T(e_1 + e_3) = e_1 + 2e_2 + ke_3.$$

(a) Determinare se esiste un prodotto scalare su V tale che T è un operatore unitario.

Supponiamo ora che V è euclideo, $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ è ortogonale e $\|e_i\| = 2, 1 \leq i \leq 3$.

(b) Determinare tutti i valori di k per i quali T è un operatore simmetrico.

(c) Per tutti i valori di k trovati in (b), determinare una matrice $M \in O(3)$ che diagonalizza T.

2. Sia $k \in\mathbb{R}$. Nello spazio affine reale $\mathbb{A}^4$ con coordinate X, Y, Z, W, consideriamo la retta r di equazione

$$r : \begin{cases} X - Z + W = 1 \\ X - Z = 2 \\ Y = 3 \end{cases}$$

e il piano p_k di equazione

$$p_k : \begin{cases} X + kY - Z + W = 1 \\ X - Z = 2 \end{cases}.$$

(a) Determinare un'affinità $f : \mathbb{A}^4 \to \mathbb{A}^4$ tale che $f(r) \subset p_k$.

Sia ora $\mathbb{A}^4 \subset\mathbb{P}^4$ con iperpiano all'infinito H_0 di equazione $X_0 = 0$ e sia V=$\mathbb{R}^5$ (in modo che $\mathbb{P}^4$=$\mathbb{P}$(V)).

(b) Determinare due sottospazi W, U di V tali che $\overline{r}$ =$\mathbb{P}$(W), $\overline{p}_k$ =$\mathbb{P}$(U).

(c) Determinare per quali i valori di k esiste una retta s di $\mathbb{A}^4$, passante per l'origine e tale che $L(\overline{r}, \overline{s}) = \overline{p}_k$.

3. Siano $k, h \in \mathbb{R}$ e siano $\mathcal{C}_k$ la conica (affine reale o euclidea) di equazione

$$(k+1)X^2 + 2\sqrt{2}XY + kY^2 + 2 = 0$$

e $\mathcal{D}_h$ la conica (affine reale o euclidea) di equazione

$$hX^2 + hY^2 - X = 0.$$

(a) Determinare per quali k, h si ha che $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono non degeneri, semplicemente degeneri o doppiamente degeneri e sono ellissi, iperboli o parabole.

(b) Determinare l'equazione canonica euclidea di $\mathcal{C}_k$.

(c) Determinare i valori k e di h per cui $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono affinemente equivalenti (nel caso affine reale) o congruenti (nel caso euclideo).