ESERCIZIO 3

(i)

$$A_K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & K^2-1 & 0 \\ 2 & 0 & K \end{pmatrix} \quad A_{0K} = \begin{pmatrix} K^2-1 & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$$

$$\text{DET } A_K = (K^2-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & K \end{vmatrix} = (K^2-1)(K-4)$$

$$\text{DET } A_{0K} = (K^2-1)K$$

$\mathscr{C}$ È NON DEGENERE SE E SOLO SE $K \neq \pm 1, K \neq 4$

SE $K = \pm 1$ ALLORA $A_{\pm 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$

SE $K = 4$ ALLORA $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 15 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

IN OGNI CASO RANK $A_K = 2$ QUINDI SE $K \in \{-1, 1, 4\}$ ALLORA $\mathscr{C}_K$ È SEMPLICEMENTE DEGENERE

$\mathscr{C}_K$ È A CENTRO SE E SOLO SE $K \neq 0$, $K \neq \pm 1$; SE $K \in \{0, 1, -1\}$ ALLORA $\mathscr{C}_K$ NON È A CENTRO

$$B_h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & h^2 \\ 0 & 3h & 1 \\ h^2 & 1 & h-1 \end{pmatrix} \quad B_{0h} = \begin{pmatrix} 3h & 1 \\ 1 & h-1 \end{pmatrix}$$

$$\text{DET } B_h = h^2 \begin{vmatrix} 0 & 3h \\ h^2 & 1 \end{vmatrix} = -h^2 \cdot h^2 \cdot 3h = -3h^5$$

$$\text{DET } B_{0h} = 3h(h-1)-1 = 3h^2-3h-1$$

$\mathcal{D}_h$ È NON DEGENERE SE E SOLO SE $h \neq 0$

SE $h=0$ ALLORA $B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

CHE HA RANGO 2, QUINDI $\mathcal{D}_0$ È SEMPLICEMENTE DEGENERE

LE SOLUZIONI DI $3h^2-3h-1=0$ SONO

$$h = \frac{3 \pm \sqrt{9+12}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{6} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{7}{12}}$$

$\mathcal{D}_h$ È A CENTRO SE E SOLO SE $h \neq \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{7}{12}}$; SE $h = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{7}{12}}$ ALLORA $\mathcal{D}_h$ NON È A CENTRO

ORA DETERMINIAMO PER QUALI K ABBIAMO CHE $\mathcal{C}_K$ È UN'ELLISSE O UN'IPERBOLE

$\det A_{0K} = (K-1)(K+1)K$

$\mathcal{C}_K$ È UN'ELLISSE SE E SOLO SE $\begin{cases} \det A_{0K} > 0 \\ \det A_K \neq 0 \end{cases}$

$\longleftrightarrow \quad -1 < K < 0 \vee 1 < K < 4 \vee K > 4$

$\mathcal{C}_K$ È UN'IPERBOLE SE E SOLO SE

$K < -1 \vee 0 < K < 1$

DETERMINIAMO PER QUALI h ABBIAMO CHE $\mathcal{D}_h$ È UN'ELLISSE O UN'IPERBOLE

$\det B_{0h} = 3h^2 - 3h - 1$

$\mathcal{D}_h$ È UN'ELLISSE SE E SOLO SE $\begin{cases} \det B_{0h} > 0 \\ \det B_h \neq 0 \end{cases}$

$\longleftrightarrow \quad h < \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{7}{12}} \vee h > \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{7}{12}}$

$\mathcal{D}_h$ È UN'IPERBOLE SE E SOLO SE

$\longleftrightarrow \quad \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{7}{12}} < h < 0 \vee 0 < h < \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{7}{12}}$

(ii)

DISTINGUIAMO I SEGUENTI CASI:

(a) $-1 < k < 0 \lor 1 < k < 4 \lor k > 4$

(b) $k < -1 \lor 0 < k < 1$

(c) $k = 0$

(d) $k = 1$

(e) $k = -1$

(f) $k = 4$

(a) $-1<k<0 \ \vee \ 1<k<4 \ \vee \ k>4$ 5

$$\mathcal{C}_k: \quad (k^2-1)x^2 + ky^2 + 4y + 1 = 0$$

APPLICHIAMO LA TRASFORMAZIONE

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \widetilde{M} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{DOVE} \quad \widetilde{M} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ -2/k & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & k^2-1 & 0 \\ 2 & 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2/k & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-4/k & 0 & 2 \\ 0 & k^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} =$$

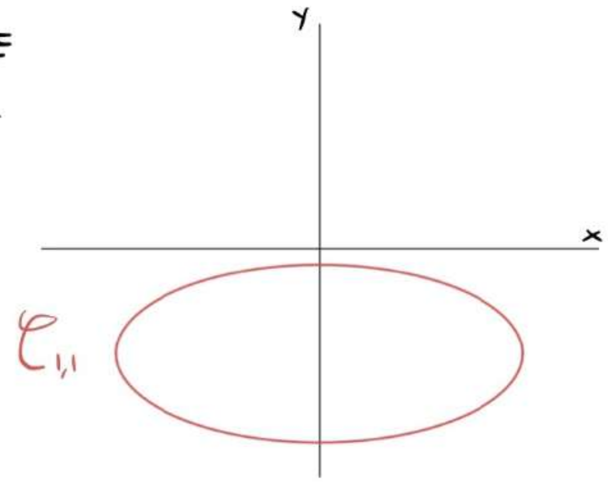
$$= \begin{pmatrix} 1-4/k & 0 & 0 \\ 0 & k^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{C}_k: \quad (k^2-1)x'^2 + ky'^2 + \left(\frac{k-4}{k}\right) = 0$$

$$\frac{x'^2}{\left[\frac{k-4}{k(k^2-1)}\right]} + \frac{y'^2}{\left[\frac{k-4}{k^2}\right]} + 1 = 0$$

QUINDI LA TRASFORMAZIONE DEFINITA DA $\widetilde{M}$ PORTA $\mathcal{C}_k$ IN FORMA CANONICA EUCLIDEA

IN PARTICOLARE NOTIAMO CHE SE $k>4$ $\mathcal{C}_k$ È UN'ELLISSE A PUNTI NON REALI, MENTRE SE $-1<k<0 \vee 1<k<4$ $\mathcal{C}_k$ È UN'ELLISSE A PUNTI REALI

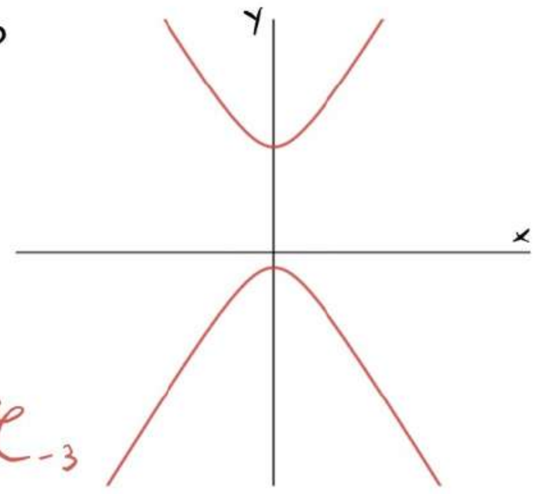


(b) $k<-1 \vee 0<k<1$

LA STESSA TRASFORMAZIONE DEL PUNTO (a) PORTA $\mathcal{C}_k$ IN FORMA CANONICA

$$\mathcal{C}_k: \frac{x'^2}{\left[\frac{k-4}{k(k^2-1)}\right]} + \frac{y'^2}{\left[\frac{k-4}{k^2}\right]} + 1 = 0$$

(IPERBOLE)



(c) $k=0$

$$\mathcal{C}_0: -x^2 + 4y + 1 = 0$$

$$x^2 - 2\left(2y - \tfrac{1}{2}\right) = 0$$

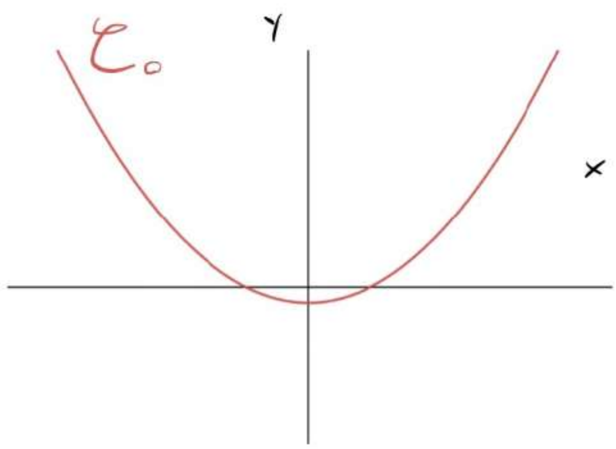
ALLORA LA TRASFORMAZIONE

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ x' + 1/4 \end{pmatrix}$$ PORTA $\mathcal{C}_k$ IN FORMA CANONICA EUCLIDEA

$$\mathcal{C}_0: y'^2 - 2\cdot\left(2\left(x' + 1/4\right) - \tfrac{1}{2}\right) = 0$$

$$y'^2 - 2\cdot 2x' = 0$$

(PARABOLA)

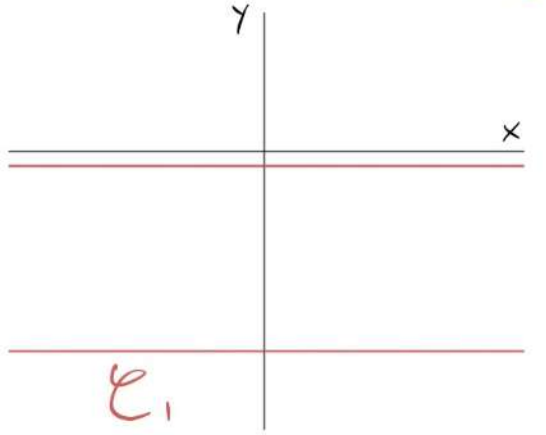


(d) $K = 1$

$$\mathcal{C}_1 : \quad y^2 + 4y + 1 = 0$$

$$y^2 + 4y + 4 - 3 = 0$$

$$(y+2)^2 - 3 = 0$$



QUINDI LA TRASFORMAZIONE

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y'-2 \end{pmatrix}$ PORTA $\mathcal{C}_1$ IN FORMA

CANONICA EUCLIDEA

$$\mathcal{C}_1 : \quad y'^2 - 3 = 0$$

(COPPIA DI RETTE PARALLELE)

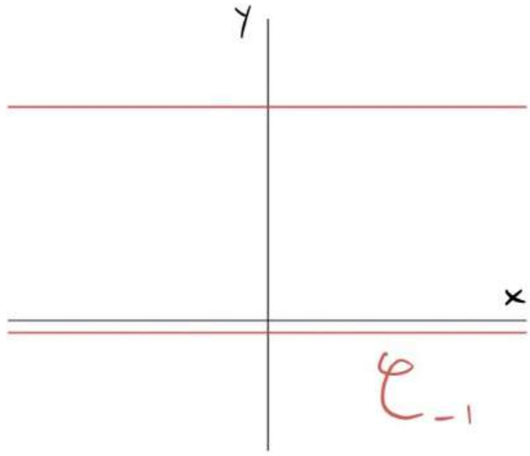
(e) $K = -1$

$$\mathcal{C}_{-1} : \quad -y^2 + 4y + 1 = 0$$

$$y^2 - 4y - 1 = 0$$

$$y^2 - 4y + 4 - 5 = 0$$

$$(y-2)^2 - 5 = 0$$



QUINDI LA TRASFORMAZIONE

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y'+2 \end{pmatrix}$ PORTA $\mathcal{C}_1$ IN FORMA

CANONICA EUCLIDEA

$$\mathcal{C}_{-1} : \quad y'^2 - 5 = 0$$

(COPPIA DI RETTE PARALLELE)

(f) $k = 4$

$$\mathcal{C}_4 : \quad 15x^2 + 4y^2 + 4y + 1 = 0$$

$$15x^2 + (2y+1)^2 = 0$$

APPLICHIAMO LA TRASFORMAZIONE

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' - 1/2 \end{pmatrix}$ E OTTENIAMO

$$\mathcal{C}_4 : \quad 15x'^2 + 2y'^2 = 0$$

$$\frac{x'^2}{1/15} + \frac{y'^2}{1/2} = 0$$

CHE È LA FORMA CANONICA EUCLIDEA DI $\mathcal{C}_k$ (ELLISSE DEGENERE)

(iii)

DOBBIAMO CLASSIFICARE $\mathcal{D}_h$ NEL CASO AFFINE:

SE $h < \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{7}{12}} \vee h > \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{7}{2}}$ $\mathcal{D}_h$ È UN'ELLISSE;
IN TAL CASO, VOGLIAMO CAPIRE SE È A PUNTI REALI O NO, PER FARLO NOTIAMO CHE IL PUNTO $(0,0)$ RISOLVE SEMPRE L'EQUAZIONE DI $\mathcal{D}_h$, E QUINDI $\mathcal{D}_h$ È UN'ELLISSE A PUNTI REALI

SE $\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{7}{12}} < h < 0 \vee 0 < h < \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{7}{12}}$ $\mathcal{D}_h$ È UN'IPERBOLE

SE $h=0$ L'EQUAZIONE DI $\mathcal{D}_h$ È

$$\mathcal{D}_h: \quad -y^2 + 2xy = 0$$

$$y(2x - y) = 0$$

QUINDI $\mathcal{D}_h$ È UNA COPPIA DI RETTE INCIDENTI IN UN PUNTO

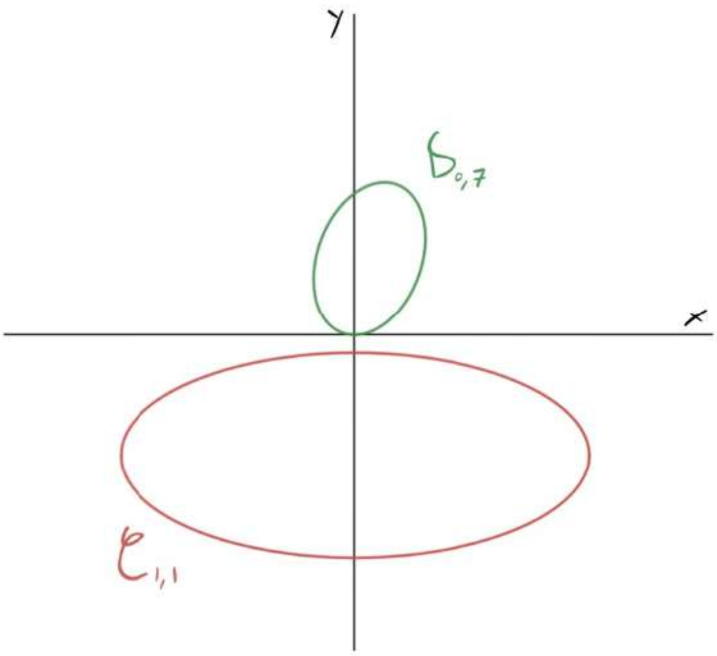
CONCLUDIAMO CHE $\mathcal{C}_k$ E $\mathcal{D}_h$ SONO AFFINEMENTE EQUIVALENTI SE E SOLO SE

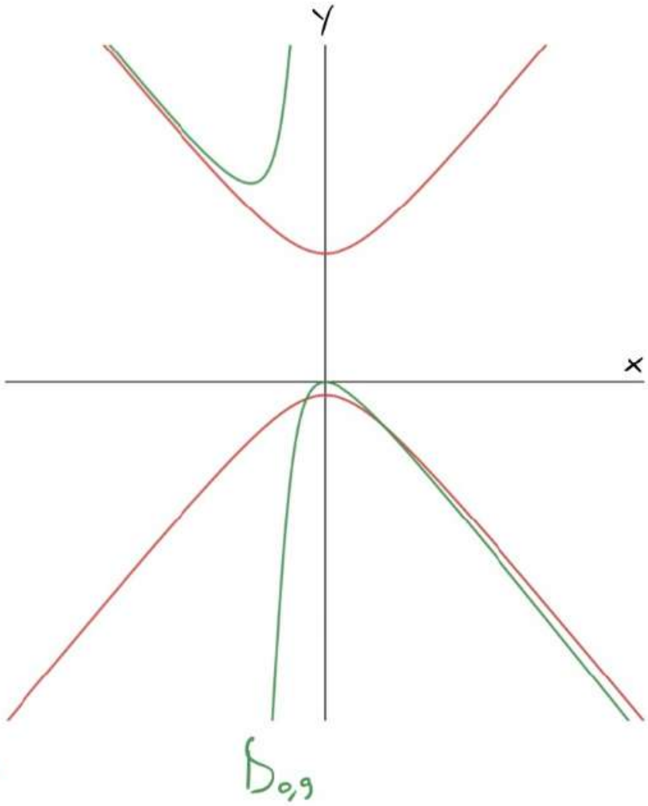
$$\left(h < \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{7}{12}} \vee h > \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{7}{2}}\right) \wedge \left(-1 < k < 0 \vee 1 < k < 4\right)$$

OPPURE

$$\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{7}{12}} < h < \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{7}{12}}\right) \wedge \left(k < -1 \vee 0 < k < 1\right)$$

NEL PRIMO CASO $\mathcal{C}_k$ E $\mathcal{D}_h$ SONO ELLISSI A PUNTI REALI, NEL SECONDO CASO SONO IPERBOLI





ESERCIZIO 2

(i)

$$A_k = \begin{pmatrix} 4k^2+4 & -2k^2 & 0 \\ -2k^2 & k^2-4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad A_{0k} = \begin{pmatrix} k^2-4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{DET } A_k = \left[(4k^2+4)(k^2-4) - 4k^4\right]\cdot(-4) =$$

$$= -4\left(-12k^2-16\right) = 16\left(3k^2+4\right) > 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

$\longrightarrow \mathcal{C}_k$ È NON DEGENERE $\forall k \in \mathbb{R}$

$$\text{DET } A_{0k} = (k^2-4)\cdot(-4)$$

$\longrightarrow \mathcal{C}_k$ È NON A CENTRO SE $k = 2 \vee k = -2$

$\longrightarrow \mathcal{C}_k$ È A CENTRO SE $k \neq 2 \wedge k \neq -2$

$$B_h = \begin{pmatrix} -1 & h & 1 \\ h & h^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_{0h} = \begin{pmatrix} h^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{DET } B_h = -h^2$$

$\longrightarrow \mathcal{D}_h$ È NON DEGENERE SE $h \neq 0$

$$B_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ HA RANGO } 2$$

$\longrightarrow \mathcal{D}_0$ È SEMPLICEMENTE DEGENERE

$$\text{DET } B_{0h} = 0$$

$\longrightarrow \mathcal{D}_h$ È NON A CENTRO $\forall h \in \mathbb{R}$

(ii)

NOTIAMO CHE A_{0K} È GIÀ DIAGONALE;

SUPPONIAMO $K \neq 2 \wedge K = -2$.

DAL MOMENTO IN CUI LA CONICA È A CENTRO, APPLICHIAMO L'ISOMETRIA

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \tilde{M} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix}$$ DOVE

$$\tilde{M} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -a_{01}/a_{11} & 1 & 0 \\ -a_{02}/a_{22} & 0 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2K^2}{K^2-4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2K^2}{K^2-4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4K^2+4 & -2K^2 & 0 \\ -2K^2 & K^2-4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2K^2}{K^2-4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2K^2}{K^2-4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4\frac{2+K^2}{2-K^2} & -2K^2 & 0 \\ 0 & K^2-4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4\frac{2+K^2}{2-K^2} & 0 & 0 \\ 0 & K^2-4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{C}_K: (K^2-4)x'^2 - 4y'^2 + 4\frac{2+K^2}{2-K^2} = 0$$

STUDIAMO IL SEGNO DEI COEFFICIENTI

$k^2-4>0 \iff k>2 \vee k<-2$

$k^2-4<0 \iff -2<k<2$

$4\frac{2+k^2}{2-k^2}>0 \iff -2<k<2$

$4\frac{2+k^2}{2-k^2}<0 \iff k>2 \vee k<-2$

SIA $k>2 \vee k<-2$, ALLORA

$$\mathcal{C}_k: \frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1 \quad \text{(IPERBOLE)}$$

DOVE $a=2\sqrt{\frac{k^2+2}{(k^2-4)(k^2-2)}}$, $b=\sqrt{\frac{k^2+2}{k^2-2}}$

SIA $-2<k<2$, ALLORA

$$\mathcal{C}_k: \frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1 \quad \text{(ELLISSE)}$$

DOVE $a=2\sqrt{\frac{2+k^2}{(4-k^2)(2-k^2)}}$, $b=\sqrt{\frac{2+k^2}{2-k^2}}$

ORA SUPPONIAMO $K=2 \vee K=-2$, ALLORA $\mathcal{C}_K$ È NON A CENTRO E LA SUA EQUAZIONE È

$$\mathcal{C}_K: \quad -4Y^2 - 16X + 20 = 0$$

$$Y^2 + 4X + 5 = 0$$

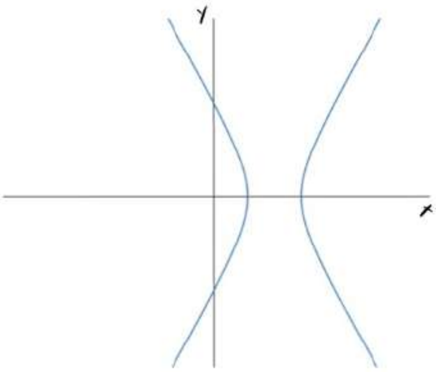
$$\begin{pmatrix} 1 \\ X \\ Y \end{pmatrix} = \widetilde{M} \begin{pmatrix} 1 \\ X' \\ Y' \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5/2 \cdot 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5/8 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

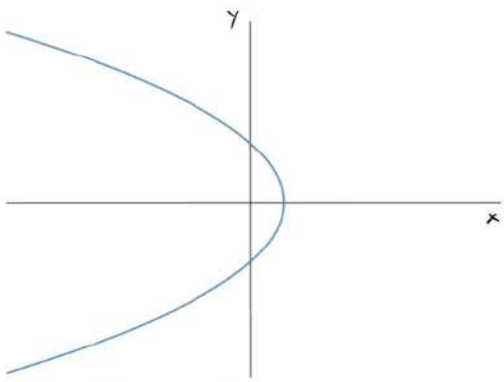
$$\mathcal{C}_K: \quad Y'^2 - 4X' = 0$$

$$\mathcal{C}_K: \quad Y'^2 - 2P X' = 0 \qquad \text{(PARABOLA)}$$

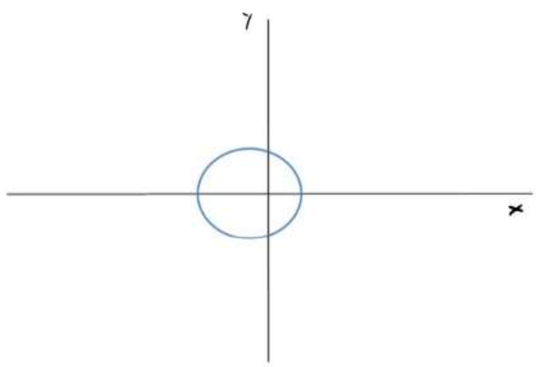
DOVE $P = 2$



$K=-4$



$K=-2$



$K=-1$

ESERCIZIO 5

(i)

$$r: \begin{cases} X = T-1 \\ Y = T+1 \\ Z = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} T = X+1 \\ Y = (X+1)+1 \\ Z = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} Y - X - 2 = 0 \\ Z = 0 \end{cases}$$

$$\bar{r}: \begin{cases} x_2 - x_1 - 2x_0 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\pi: \; X + Z + 1 = 0$$

$$\bar{\pi}: \; x_1 + x_3 + x_0 = 0$$

(ii)

$$\pi': \quad a x_0 + b x_1 + c x_2 + d x_3 = 0$$

$$\pi' \cap \bar{\pi}: \begin{cases} a x_0 + b x_1 + c x_2 + d x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_0 = 0 \end{cases}$$

2

VOGLIAMO CHE $\overline{\pi} \cap (r' \cap \overline{r}) \neq \phi$

OVVERO VOGLIAMO CHE IL SEGUENTE SISTEMA OMOGENEO NELLE INCOGNITE x_0, x_1, x_2, x_3 AMMETTA INFINITE SOLUZIONI

$$\begin{cases} a x_0 + b x_1 + c x_2 + d x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_0 = 0 \\ x_2 - x_1 - 2 x_0 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

DOBBIAMO IMPORRE QUINDI $\det A = 0$

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} b & c \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -(b + c) - (-a + 2b) =$$

$$= a - 3b - c \longrightarrow a - 3b - c = 0$$

ESERCIZIO 6

$$\pi_K : \begin{cases} X = T + K \\ Y = K + 1 \\ Z = T \end{cases} \qquad s_K : \begin{cases} X + Y = K \\ X - Z = 1 \end{cases}$$

(i)

$$\pi_K : \begin{cases} X = Z + K \\ Y = K + 1 \end{cases} \longrightarrow \overline{\pi_K} : \begin{cases} K x_0 - x_1 + x_3 = 0 \\ (K+1) x_0 - x_2 = 0 \end{cases}$$

$$s_K : \begin{cases} X + Y = K \\ X - Z = 1 \end{cases} \longrightarrow \overline{s_K} : \begin{cases} K x_0 - x_1 - x_2 = 0 \\ x_0 - x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

(ii)

SCRIVIAMO $\overline{\pi_K}$ ED $\overline{s_K}$ IN FORMA PARAMETRICA

$$\overline{\pi_K} : [x_0, x_1, x_2, x_3] = [T, q, (K+1)T, -KT + q]$$

DOVE $[T, q] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$

$$\overline{s_K} : [x_0, x_1, x_2, x_3] = [U, V, KU - V, -U + V]$$

DOVE $[U, V] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$

SIA μ UN GENERICO PIANO CONTENENTE SIA $\overline{\pi_K}$ CHE $\overline{s_K}$

$$\pi: \; AX_0 + BX_1 + CX_2 + DX_3 = 0$$

DOBBIAMO IMPORRE LE SEGUENTI CONDIZIONI

$$\begin{cases} AT + Bq + C(K+1)T + D(-KT+q) = 0 & \forall [T,q] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \\ AU + BV + C(KU-V) + D(-U+V) = 0 & \forall [U,V] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} A + C(K+1) - DK = 0 \\ B + D = 0 \\ A + CK - D = 0 \\ B - C + D = 0 \end{cases}$$

LA MATRICE DEI COEFFICIENTI È

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & K+1 & -K \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & K & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det M = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & K & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & K+1 & -K \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} K & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ K & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} K+1 & -K \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} K+1 & -K \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= K - 1 - K - K - 1 + K + K + 1 = K - 1$$

SE $K \neq 1$ ALLORA $\det M \neq 0$ E IL SISTEMA AMMETTE L'UNICA SOLUZIONE $(A,B,C,D) = (0,0,0,0)$ CHE NON È ACCETTABILE, PERTANTO NON ESISTONO PIANI CONTENENTI $\overline{\pi_k}$ ED $\overline{\Delta_k}$.

SE $k=1$ ALLORA $\det M = 0$ ED IL SISTEMA AMMETTE SOLUZIONI NON NULLE

$$\begin{cases} A + 2C - D = 0 \\ B + D = 0 \\ A + C - D = 0 \\ B - C + D = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A = -m \\ B = m \\ C = 0 \\ D = -m \end{cases} \quad m \in \mathbb{R}$$

PERTANTO, SE $k=1$, L'EQUAZIONE DELL'UNICO PIANO CONTENENTE $\overline{\pi_k}$ ED $\overline{\Delta_k}$ È

$$\rho : -x_0 + x_1 - x_3 = 0$$

TUTORATO 10

ESERCIZIO 1

Sia $\mathcal{C}$ la conica reale (affine o euclidea) di equazione

$$-x^2+y^2+2\sqrt{3}\,xy+2x+2=0$$

Determinare una trasformazione che porta in forma canonica $\mathcal{C}$ s.a nel caso affine che euclideo

Soluzione

Per portare $\mathcal{C}$ in forma canonica vogliamo prima di TUTTO eliminare il termine in xy

Scriviamo la matrice A associata alla conica $\mathcal{C}$

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&-1&\sqrt{3}\\0&\sqrt{3}&1\end{pmatrix}$$

Allora abbiamo che $A_0=\begin{pmatrix}-1&\sqrt{3}\\\sqrt{3}&1\end{pmatrix}$

Per eliminare il termine in xy Diagonalizziamo A_0:

La matrice di A_0 definisce un operatore simm.

$\Rightarrow \exists\, M\in O(2)$ tale cui $M^T A_0 M=M^{-1}A_0 M$ è diagonale

Calcoliamo M:

POLINOMIO CARATTERISTICO

$$P_A=\begin{vmatrix}-1-t&\sqrt{3}\\\sqrt{3}&1-t\end{vmatrix}=-(1+t)(1-t)-3=-(1-t^2)-3=$$

$$=t^2-4=0$$

$\Rightarrow$ Autovalori $t_1=2$ e $t_2=-2$

Calcoliamo gli autospazi relativi a gli autovalori

V_2:

$$\begin{pmatrix}-3&\sqrt{3}\\\sqrt{3}&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-3x_1+\sqrt{3}x_2=0\\+\sqrt{3}x_1-x_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\frac{3}{\sqrt{3}}x_2+\sqrt{3}=0\\x_1=\frac{x_2}{\sqrt{3}}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} x_2 \\ x_2 = t \end{cases} \Rightarrow V_2 = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 1 \end{pmatrix}}_{= v_1} \right\rangle$$

V_{-2} :

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + \sqrt{3} x_2 = 0 \\ \sqrt{3}\, x_1 + 3 x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{3} x_2 \\ x_2 = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{-2} = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}}_{= v_2} \right\rangle$$

$\Rightarrow$ Sia

$$v_1' = \frac{v_1}{\sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle}} = \frac{v_1}{2/\sqrt{3}} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$$v_2' = \frac{v_2}{\sqrt{\langle v_2, v_2 \rangle}} = \frac{v_2}{2} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Sia M la matrice che ha per colonne gli autovettori allora si ha che

$$M^t A_0 M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Applichiamo la trasformazione $\begin{cases} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{2} x - \frac{\sqrt{3}}{2} y \\ y' = \sqrt{3}/2\, x + \frac{1}{2} y \end{cases}$$ nella conica $\mathcal{C}$

$$-\left(\frac{1}{2} x - \frac{\sqrt{3}}{2} y\right)^2 + \left(\sqrt{3}/2\, x + \frac{1}{2} y\right)^2 + 2\sqrt{3} \left(\frac{1}{2} x - \frac{\sqrt{3}}{2} y\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{1}{2} y\right)$$

Danno il contributo solo di termini x^2, y^2, xy che so già quanto vengono

$$+ 2\left(\frac{1}{2} x - \frac{\sqrt{3}}{2} y\right) + 2 = 0$$

So che la conica si riduce alla forma

$$\underbrace{2}_{\text{primo autovalore}} x^2 \underbrace{-2}_{\text{secondo autovalore}} y^2 + \underbrace{0 \cdot xy}_{\text{termine } xy \text{ si cancella}} + ax + by + d$$

a, b, c da determinare

$\Rightarrow$ Dopo la trasformazione avrò

$$2x^2 - 2y^2 + 2\left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y\right) + 2 \stackrel{=0}{} \Rightarrow$$

$$\mathcal{C}: 2x^2 - 2y^2 + x - \sqrt{3}y + 2 = 0$$

1) La prima trasformazione è data da $\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & M & \\ 0 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

Ora vogliamo eliminare i termini in x, y

$$\begin{cases} x' = x - \dfrac{\overset{=a_{01}}{(1/2)}}{a_{11}} = x' - \dfrac{1/2}{2} = x' - \dfrac{1}{4} \\ y' = y - \dfrac{\overset{\Rightarrow a_{02}}{(-\sqrt{3}/2)}}{a_{22}} = y' - \dfrac{-\sqrt{3}/2}{-2} = y - \dfrac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

Applichiamo e viene

$$2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - 2\left(y - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{4}\right) - \sqrt{3}\left(y - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + 2 =$$

$$= 2x^2 + \frac{1}{8} - \cancel{x} - 2y^2 + \frac{3}{8} + \cancel{\sqrt{3}y} + \cancel{x} - \frac{1}{4} - \cancel{\sqrt{3}y} + \frac{3}{4} + 2$$

$$\rightsquigarrow \mathcal{C}: 2x^2 - 2y^2 + 3 = 0$$

2) Abbiamo applicato alla matrice di $\mathcal{C}$ la trasformazione data da $\tilde{M}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

~~Ora distinguiamo caso affine e euclideo~~

Dividiamo per 3 e l'equazione diventa

$$\frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}y^2 + 1 = 0$$

③ Abbiamo applicato alla A matrice di $C \rightsquigarrow \frac{1}{3}A$

Distinguiamo caso affine e euclideo

- Caso affine: ~~applic~~ NORMALIZZO i coefficienti $\rightsquigarrow \begin{cases} x' = \dfrac{x}{\sqrt{2/3}} \\ y' = \dfrac{y}{\sqrt{|-2/3|}} = \dfrac{y}{\sqrt{2/3}} \end{cases}$

e l'equazione diventa

$$\boxed{x^2 - y^2 + 1 = 0}$$

- ~~caso eu~~ e abbiamo applicato $\tilde{M}'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

- Caso euclideo: l'equazione è

$$\boxed{\frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2} = 1}$$

L E AFFINITÀ o ISOMETRIE

- AFFINITÀ: chiamo

$$C = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{\tilde{M}''} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ -3/4 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\tilde{M}'} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

~~$C^T A C \sim x^2 - y^2 - 1$~~

ed è tale che $(C\tilde{x})^t A C \tilde{x} = 0 \iff$

$$\tilde{x}^t C^t A C \tilde{x} = 0$$ ~~…~~ è l'equazione

$$x^2 - y^2 + 1 = 0 \qquad \text{dove } \tilde{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

1) caso ellisse:

$$C' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

e la canonica ha equazione

$$\frac{x^2}{(\sqrt{3}/\sqrt{2})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{3}/\sqrt{2})^2} = 1$$

2)

ESERCIZIO 4

Si consideri lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ con coordinate proiettive $[x_0 : \dots : x_3]$. Si considerino il sottospazio vettoriale V_1 di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $v_1 = (1, 0, 3, 2)$ e $v_2 = (3, 0, -1, 0)$ e i sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ definiti come $S_1 = \mathbb{P}(V_1)$ e

$$S_2 : x_0 - 2x_1 + x_3 = 2x_0 + 2x_3 + kx_1 = 0 \quad , k \in \mathbb{R}$$

Siano infine U_0 e U_2 gli spazi affini $\{x_0 \neq 0\}$ e $\{x_2 \neq 0\}$ con coordinate $y_i = \frac{x_i}{x_0}$ per $i = 1, 2, 3$ e $w_i = \frac{x_i}{x_2}$ per $i = 0, 1, 3$

1) Si calcoli al variare di $k \in \mathbb{R}$ quali sono le dimensioni di S_1, S_2, $S_1 \cap S_2$ e di $L(S_1, S_2)$

Soluzione:

- Il sottospazio vettoriale V_1 di $\mathbb{R}^3$ è generato da due vettori indipendenti e, quindi ha dimensione 2.

$$\Rightarrow \dim(S_1) = 2 - 1 = 1 \quad \text{dove } S_1 = \mathbb{P}(V_1) \Rightarrow \text{è retta proiettiva}$$

- S_2 è descritto da due equazioni lineari omogenee e per stabilire la dimensione dobbiamo controllare che siano indipendenti.

La matrice dei coefficienti

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & k & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ha rango 1 se e solo se $k = -4$ (per $k \neq 4$ il rango è 2).

$$\Rightarrow \dim(S_2) = \begin{cases} 2 & \text{per } k = -4 \Rightarrow \text{piano proiettivo} \\ 1 & \text{per } k \neq -4 \Rightarrow \text{retta proiettiva} \end{cases}$$

- $S_1 \cap S_2$:

Scrivere le equazioni cartesiane della retta S_1

$$S_1 : \begin{cases} x_0 = t + 3s \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 3t - s \\ x_3 = 2t \end{cases}$$ $s, t \in \mathbb{R}$ eq parametrica

Scriviamo la cartesiana

$$\leadsto \begin{cases} t = \frac{x_3}{2} \\ -x_2 + \frac{3}{2} x_3 = s \\ x_1 = 0 \\ x_0 = t + 3s \end{cases} \leadsto \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_0 - \frac{x_3}{2} + 3x_2 - \frac{9}{2} x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\leadsto \begin{cases} x_1 = 0 \\ 5x_3 - 3x_2 - x_0 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_1 \cap S_2 : \begin{cases} x_1 = 0 \\ 5x_3 - 3x_2 - x_0 = 0 \\ x_0 - 2x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_0 + 2x_3 + kx_1 = 0 \end{cases} \leadsto \begin{cases} 5x_3 - 3x_2 - x_0 = 0 \\ x_0 = -x_3 \\ x_0 = -x_3 \end{cases}$$

$$\leadsto \begin{cases} x_0 = -t \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 2t \\ x_3 = t \end{cases}$$

$\Rightarrow$ è il punto $[-1 : 0 : 2 : 1]$ che ha dimensione 0

$\Rightarrow \dim(S_1 \cap S_2) = 0$

$\Rightarrow$ $L(S_1, S_2)$:

- $K = -4$

$$\dim(L(S_1, S_2)) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2) =$$
$$= 1 + 2 - 0 = 3 \Rightarrow \text{è tutto } \mathbb{P}^3$$

- $K \neq 4$ $\quad \dim(L(S_1, S_2)) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2)$
$$= 1 + 1 - 0 = 2$$

2) Posto $K = 3$ si ricavino le eq. cartesiane per $L(S_1, S_2)$

- S_1 è $\mathbb{P}(V_1)$ dove $V_1 = \langle v_1, v_2 \rangle$

- S_2? Calcoliamo:

$$\begin{cases} 2x_0 - 2x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_0 + 2x_3 + 3x_1 = 0 \end{cases} \quad \text{cartesiane}$$

Calcoliamo le parametriche

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 2x_1 + x_3 \\ x_1 = x_3 \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x_0 = 3t \\ x_1 = t \\ x_2 = s \\ x_3 = t \end{cases} \quad \Rightarrow S_2 = \mathbb{P}(V_2)$$

dove $V_2 = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{w_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{w_2} \right\rangle$

3) $L(S_1, S_2)$:

	x_0	x_1	x_2	x_3
w_1	3	1	0	1
w_2	0	0	2	0
v_2	3	0	-1	0

$\leadsto$ ho eq: $3x_1 - 3x_3 = 0$

3) Si scrivano delle eq. parametriche (nelle coordinate y_i di U_0) per $U_0 \cap S_1$

Soluzioni

Per ricavare $S_1 \cap U_0$ basta deomogeneizzare le eq cartesiane di S_1 rispetto a x_0

Siccome vale: $5x_3 - 3x_2 - x_0 = x_1 = 0$

ovvero nei punti di x_0:

$$S_1 \cap U_0: \; (1/x_0)(5x_3 - 3x_2 - x_0) = (1/x_0)x_1 = 0$$

$$\Rightarrow 5(x_3/x_0) - 3(x_2/x_0) - 1 = (x_1/x_0) = 0$$

cioè nelle coordinate $y_i = x_i/x_0$

$$S_1 \cap U_0: \; 5y_3 - 3x_2 - 1 = y_1 = 0$$