TUTORATO 1

ESERCIZIO 1

Dato lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^n$, stabilire se l'applicazione $\phi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ è bilineare

1) $\varphi(u, v) = \sum_{j=1}^{n} x_j \, |y_j|$ dove $u = (x_1, \dots, x_n)$, $v = (y_1, \dots, y_n)$

- φ è lineare rispetto alla prima variabile:

$$\varphi(u + u', v) = \sum_{j=1}^{n} (x_j + x_j')\,|y_j| = \sum_{j=1}^{n} x_j\,|y_j| + \sum_{j=1}^{n} x_j'\,|y_j|$$

$$= \varphi(u, v) + \varphi(u', v)$$

- φ non è lineare rispetto alla seconda variabile infatti

$$\varphi(u, v + v') = \sum_{j=1}^{n} x_j \,|y_j + y_j'| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} x_j \left(|y_j| + |y_j'|\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j\,|y_j| + \sum_{j=1}^{n} x_j\,|y_j'| =$$

$$= \varphi(u, v) + \varphi(u, v')$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(u, v + v') \leq \varphi(u, v) + \varphi(u, v')$$

$\Rightarrow$ non è una forma bilineare

2) $\varphi(U,V) = \left| \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \right|$

Non è lineare né rispetto alla prima né rispetto alla seconda variabile

Vediamo per esempio che non è lineare rispetto alla prima variabile

$$\varphi(U+U', V) = \left| \sum_{j=1}^{n} (x_j + x_j') y_j \right| =$$

$$= \left| \sum_{j=1}^{n} x_j y_j + \sum_{j=1}^{n} x_j' y_j \right| \leq$$

$$\leq \left| \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \right| + \left| \sum_{j=1}^{n} x_j' y_j \right| =$$

$$\leq \varphi(U,V) + \varphi(U',V)$$

$\Rightarrow$ non è una forma bilineare.

3) $\varphi(U,V) = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \right) \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \right)$

è una forma bilineare infatti

• LINEARITÀ rispetto alla prima variabile

$$\varphi(U+U', V) = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j + x_j' \right) \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \right)$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} x_j + \sum_{j=1}^{n} x_j' \right) \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \right)$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \right) \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \right) + \left(\sum_{j=1}^{n} x_j' \right) \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \right)$$

$$= \varphi(U,V) + \varphi(U',V)$$

• LINEARITÀ RISPETTO ALLA SECONDA VARIABILE ANALOGO

• $\varphi(cu, v) = \varphi(u, cv) = c\,\varphi(u, v)$

infatti

$$\varphi(cv, w) = \left(\sum_{j=1}^{m} c x_j\right)\left(\sum_{j=1}^{m} y_j\right) = c\left(\sum_{j=1}^{m} x_j\right)\left(\sum_{j=1}^{m} y_j\right)$$

$$= c\,\varphi(v, w)$$

ESERCIZIO 2

Sia $V = \mathbb{R}^3$, consideriamo su V la base canonica $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ e la base $F = \{e_1 - e_2, e_2, e_1 + e_3\}$

Consideriamo la seguente forma bilineare

$$\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longrightarrow x_1 y_1 - x_2 y_2$$

dove $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$

Svolgere le seguenti richieste

1) • Calcolare $M_E(\varphi)$

In generale supponiamo che data una base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ la matrice associata a una forma bilineare φ rispetto alla base B è $M_B(\varphi) = (\varphi(v_i, v_j))_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le m}}$

Quindi nel nostro caso

$$M_E(\varphi) = (\varphi(e_i, e_j))_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$$

con $\{e_1, e_2, e_3\}$ vettori della base canonica

Quindi calcoliamo $\varphi(e_i, e_j)$ al variare di i, j

- $\varphi(e_1, e_1) = \varphi\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$
- $\varphi(e_1, e_2) = \varphi\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = 1 \cdot 0 - 0 \cdot 1 = 0$

  $\parallel$

  $\varphi(e_2, e_1)$
- $\varphi(e_2, e_2) = \varphi\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$
- $\varphi(e_2, e_3) = \varphi\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = 0$

  $\parallel$

  $\varphi(e_3, e_2)$
- $\varphi(e_1, e_3) = \varphi\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = 0$

  $\parallel$

  $\varphi(e_3, e_1)$
- $\varphi(e_3, e_3) = 0$

$$\Rightarrow \quad M_E(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

• $M_F(\varphi)$ dove $F = \{e_1 - e_2, e_3, e_2 + e_3\}$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \overset{\shortparallel}{v_1} \quad \overset{\shortparallel}{v_2} \quad \overset{\shortparallel}{v_3}$

Come primo abbiamo $M_F(\varphi) = (\varphi(v_i, v_j))_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le m}}$

• $\varphi(v_1, v_1) = \varphi(e_1 - e_2, e_1 - e_2) \underset{\varphi \text{ è LINEARE}}{=} \varphi(e_1, e_1) - \varphi(e_1, e_2)$
$- \varphi(e_2, e_1) + \varphi(e_2, e_2) =$
SOSTITUISCO $\varphi(e_i, e_j)$ già calcolati
$= 1 - 0 - 0 - 1 = 0$

• $\varphi(v_1, v_2) = \varphi(e_1 - e_2, e_3) = \varphi(e_1, e_3) - \varphi(e_2, e_3) =$
$\shortparallel$
$\varphi(v_2, v_1) \quad = 0 - 0 = 0$

• $\varphi(v_1, v_3) = \varphi(e_1 - e_2, e_2 + e_3) = \varphi(e_1, e_2) - \varphi(e_2, e_2)$
$\shortparallel \qquad = + \varphi(e_1, e_3) - \varphi(e_2, e_3) =$
$\varphi(v_3, v_1) \quad = 0 + 1 + 0 - 0 = 1$

• $\varphi(v_2, v_2) = \varphi(e_3, e_3) = 0$

• $\varphi(v_2, v_3) = \varphi(e_3, e_2 + e_3) = \varphi(e_3, e_2) + \varphi(e_3, e_3)$
$\shortparallel$
$\varphi(v_3, v_2)$
$= 0$

• $\varphi(v_3, v_3) = \varphi(e_2 + e_3, e_2 + e_3) = \varphi(e_2, e_2) + \varphi(e_2, e_3)$
$+ \varphi(e_3, e_2) + \varphi(e_3, e_3) = -1 + 0 + 0 + 0 =$
$= -1$

$$\Rightarrow M_F(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

METODO ALTERNATIVO (1)

la Base $F = \{ e_1 - e_2, e_3, e_2 + e_3 \} =$

$$= \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= v_3} \right\}$$

e $M_F(\varphi) = \left(\varphi(v_i, v_j) \right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$

- $\varphi(v_1, v_1) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1) =$

SOSTITUENDO nella forma bilineare $\varphi(v, v) = x_1 y_1 - x_2$

e così per tutti gli altri...

dove $\varphi(v_i, v_j) = \dots$

METODO ALTERNATIVO 2

Data una forma bilineare φ rispetto alla base canonica $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ e data $F = \{v_1, v_2, v_3\}$ un'altra base di $\mathbb{R}^3$

Abbiamo che la matrice della forma bilineare associata alla base F è

$$M_F(\varphi) = \left(\varphi(v_i, v_j)\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$$

dove

$$\varphi(v_i, v_j) = v_i^t \; M_E(\varphi) \; v_j$$

dove $M_E(\varphi)$ è la matrice associata rispetto alla base canonica

Nel NOSTRO CASO $M_E(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ed $F = \left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$

Allora calcoliamo $\varphi(v_1, v_1)$

$$\varphi(v_1, v_1) = v_1^t \, M_E(\varphi) \, v_1 = (1 \; -1 \; 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (1 \; -1 \; 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

e così analogamente $\forall \; \varphi(v_i, v_j)$

2) Calcolare $M_F(\varphi)$ con la formula del cambiamento di base

Date due basi E, F, la formula di cambiamento di base per forme bilineari è la seguente

$$M_F(\varphi) = (M_{E,F})^T \; M_E(\varphi) \; (M_{E,F})$$

dove $M_{E,F}$ è LA MATRICE del cambiamento di base dalla base E alla base F, con la le $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ e $F = \{v_1, v_2, v_3\}$

Allora $M_{E,F} = ([v_1]_E \vdots [v_2]_E \vdots [v_3]_E)$

dove $[v_i]_E$ sono le coordinate del vettore v_i nella base E ossia

$v_1 = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \Rightarrow [v_1]_E = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$v_2 = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3 \Rightarrow [v_2]_E = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$v_3 = z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3 \Rightarrow [v_3]_E = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow M_{E,F} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

Nel NOSTRO CASO con $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ base canonica e $F = \{e_1 - e_2, e_3, e_2 + e_3\}$

$v_1 = 1 \cdot e + (-1) e_2 + 0 \cdot e_3$

$v_2 = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 \Rightarrow M_{E,F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$v_3 = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3$

$$\Rightarrow M_F(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{(M_{E,F})^T}{\shortparallel} \qquad \underset{M_E(\varphi)}{\shortparallel} \qquad \underset{M_{E,F}}{\shortparallel}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= M_F(\varphi)$$

3) Esplicitare il rango di tale forma bilineare

$\text{rang}(\varphi) = \text{rang}(M_B(\varphi))$ dove B è una qualsiasi base di V.

Quindi date le basi E e F dei punti precedenti

$$\text{rango}(\varphi) = \text{rang}(M_E(\varphi)) \underset{\substack{\text{poiché sono} \\ \text{congruenti}}}{=} \text{rang}(M_F(\varphi)) \underset{\substack{\text{numero} \\ \text{di colonne} \\ \text{lin indip.}}}{=} 2$$

4) Stabilire se la base canonica e la base F sono ortogonali per φ

• E è ortogonale $\iff$ $M_E(u)$ è una matrice diagonale

Ora $M_E(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ E è ortogonale

• F è ortogonale $\iff$ $M_F(u)$ è ortogonale

$M_F(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ F non è ortogonale

ESERCIZIO 3

Senza diagonalizzare, dire se le seguenti matrici simmetriche sono definite positive o definite negative

• $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Calcoliamo i minori principali della matrice:
D_1, D_2, D_3, D_4

$D_1 = |1| = 1 > 0$

$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$

$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 11 - 5 = 6 > 0$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot 11 - 27 - 11 = 33 - 27 = 6 > 0$$

Segue che la matrice è definita positiva

2) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, Calcoliamo i minori D_1, D_2, D_3

$D_1 = -1 < 0$

$D_2 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -8 - 9 = -17 < 0$

Quindi la matrice non è definita positiva e non è definita negativa

Non possiamo per ora concludere se la matrice è

semidefinita positiva,
semidefinita negativa,
o indefinita

3) $$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 7 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo i minori D_1, D_2, D_3, D_4

- $D_1 = -2 < 0$
- $D_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 < 0$

Si conclude come nel punto 2

ESERCIZIO 4

In ciascuno dei seguenti casi si considera la seguente forma quadratica $q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Determinare la forma bilineare polare e la sua matrice associata

1) $q(x,y,z) = 10x^2 + 3xy + 5y^2 + 4z^2$

1 METODO:

Data una forma quadratica $q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Sappiamo che la forma bilineare polare associata è φ come segue

$$\varphi(u,v) = \frac{q(u+v) - q(u) - q(v)}{2}$$

dove $u = (x,y,z)$ e $v = (x',y',z')$

Nel NOSTRO CASO

$$\varphi(u,v) = \frac{q(u+v)-q(u)-q(v)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(10(x+x')^2 + 3(x+x')(y+y') + 4(z+z')^2 + 5(y+y')^2 - q(u) - q(v)\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\big(10x^2 + 10x'^2 + 20xx' + 3xy + 3xy' + 3x'y + 3x'y' + 4z^2 + 4z'^2 + 8zz' + 5y^2 + 5y'^2 + 10yy' - 10x^2 - 3xy - 4z^2 - 5y^2 - 10x'^2 - 3x'y' - 4z'^2 - 5y'^2\big)$$

$$= \frac{1}{2}\left(20xy' + 3xy' + 3x'y + 8zz' + 10yy'\right)$$

$$\Rightarrow \varphi(u,v) = 10xx' + \frac{3}{2}x'y + 4zz' + 5yy'$$

2 METODO (PIÙ RAPIDO)

Data la forma quadratica

$$q(x,y,z) = 10x^2 + 3xy + 4z^2 + 5y^2$$

Avete visto ad esercitazione come calcolare la matrice associata alla FORMA POLARE:

LA MATRICE è ottenuta posizionando sulla diagonale i coefficienti dei termini al quadrato e dividendo per due i coefficienti dei prodotti tra le varie componenti. $\Rightarrow$

$q(v) =$

$\ldots x')(y+y') + 4(z+z')^2$

$\ldots u) - q(v)\big) =$

$\ldots 20\,xx' + 3xy + 3xy'$

$\ldots ' + 4z^2 + 4z'^2 + 8zz' +$

$\ldots yy' - 10x^2 - 3xy - 4z^2$

$\ldots x'y' - 4z'^2 - 5y'^2\big)$

$\ldots + 3x'y + 8zz' + 10yy'\big)$

$\ldots + 4zz' + 5yy'$

$\ldots)$

... ae

$\ldots 4z^2 + 5y^2$

... come come calcolare

... la FORMA POLARE:

... izionando sulla
... dei termini al
... per due i
... tra le vane

la matrice associata alla forma bilineare polare è $A = \begin{pmatrix} 10 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Ottenuta la matrice associata, possiamo calcolare la forma bilineare nel seguente modo

$$\varphi(u,v) = \varphi\left(\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}, \begin{matrix} x' \\ y' \\ z' \end{matrix}\right) = u^t A v =$$

$$= (x, y, z) \begin{pmatrix} 10 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} =$$

$$= 10\,xx' + \frac{3}{2}\,x'y + 4zz' + 5yy'$$

2) $q(x,y,z) = 3x^2 + 10xy + y^2$

Usiamo il SECONDO METODO

la matrice associata è $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \varphi(u,v) = (x, y, z) \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} =$$

$$= (x\ y\ z) \begin{pmatrix} 3x' + 5y' \\ 5x' + y' \\ 0 \end{pmatrix} = 3x'x + 5xy' + 5x'y + yy'$$

ESERCIZIO 5

In ciascuno dei seguenti casi determinare una base rispetto alla quale la forma quadratica $q: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ assume la forma canonica

1) $q(x,y) = i\,x^2 - 2y^2$

Se φ è la forma bilineare associata alla forma quadratica, e sia
$E = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$
allora la matrice associata a φ è

$$A = M_E(\varphi) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ora $M_E(\varphi)$ è ortogonale $\Rightarrow E = \{e_1, e_2, e_3\}$ è una base ortogonale. (infatti $\varphi(e_1,e_2) = \varphi(e_2, e_1) = 0$)

Notiamo inoltre che
$\varphi(e_1, e_1) = i$ e $\varphi(e_2,e_2) = -2$

Per avere la forma richiesta dall'esercizio posso dividere ~~ciascun vettore della base~~ i vettori e_i della base canonica per $\sqrt{\varphi(e_i, e_i)}$ e ottengo quanto voglio, infatti:

Poniamo

- $v_1 = \dfrac{e_1}{\sqrt{\varphi(e_1,e_1)}} = \dfrac{1}{\sqrt{i}} e_1$

posso farlo perché siamo in $\mathbb{C}$

- $v_2 = \dfrac{e_2}{\sqrt{\varphi(e_2,e_2)}} = \dfrac{1}{\sqrt{-2}} e_2 = \dfrac{1}{i\sqrt{2}} e_2$

~~Consideriamo~~ Sia $F = \{v_1, v_2\}$

Calcoliamo $M_F(\varphi)$ (la seguente matrice avrà la forma canonica richiesta)

Ricordiamo $M_F(\varphi) = (\varphi(v_i, v_j))_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$

- $\varphi(v_1, v_1) = \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{i}} e_1, \frac{1}{\sqrt{i}} e_1\right) = \frac{1}{i} \varphi(e_1, e_1) =$

$$= \frac{1}{i} \cdot i = 1$$

- $\varphi(v_2, v_2) = \varphi\left(\frac{1}{i\sqrt{2}} e_2, \frac{1}{i\sqrt{2}} e_2\right) = \frac{1}{i\sqrt{2}} \frac{1}{i\sqrt{2}} \varphi(e_2, e_2)$

$$= \frac{1}{-2} \cdot -2 = 1$$

- $\underset{\varphi(v_2, v_1)}{\underset{\shortparallel}{\varphi(v_1, v_2)}} = \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{i}} e_1, \frac{1}{i\sqrt{2}} e_2\right) = \frac{1}{i\sqrt{2i}} \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\varphi(e_1, e_2)}}$

$$= 0$$

$\Rightarrow M_F(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è nella forma richiesta

2) $q(x, y) = -x^2 + y^2$

Sia $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica

$\Rightarrow M_E(\varphi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$v_1 = \frac{e_1}{\sqrt{\varphi(e_1, e_2)}} = \frac{1}{i} e_1$

$v_2 = \frac{e_2}{\sqrt{\varphi(e_2, e_2)}} = e_2$

Sia $F = \{v_1, v_2\} = \{\frac{1}{\sqrt{i}} e_1, e_2\}$

è tale che $M_F(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4) $\varphi(x, y) = 2x^2 - 3xy + \frac{1}{2} y^2$

La matrice associata è $\begin{pmatrix} 2 & -3/2 \\ -3/2 & 1/2 \end{pmatrix} = A$
rispetto alla base
canonica $E = \{e_1, e_2\}$

Notiamo che E non è una base ortogonale
poiché la matrice non è diagonale

. CERCO UNA BASE ORTOGONALE!

Cerco un vettore non isotropo ovvero, un vettore
v tale che $\varphi(v, v) \neq 0$

Provo con il vettore della base canonica e_1:
$\varphi(e_1, e_1) = 2 \neq 0$
$\downarrow$
posizione 1.1
della matrice associata A

$\Rightarrow$ e_1 è un vettore non isotropo

Ora voglio una base ortogonale $\Rightarrow$ voglio
un vettore ortogonale a e_1,
HO DUE METODI PER TROVARLO

$\frac{1}{\sqrt{i}}$: e_1, e_2 }

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\begin{matrix} -3/2 \\ 1/2 \end{matrix} \Big) = A$

... ortogonale
...ponale

...TOGONALE!

...vero, un vett...

...canonico e_1:

METODO 1)

Voglio un vettore $v = \binom{x}{y}$ tale che
$\varphi(e_1, v) = 0$

Ora $\varphi(e_1, v) = e_1^t \begin{pmatrix} 2 & -3/2 \\ -3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

$\iff (1\ 0) \begin{pmatrix} 2 & -3/2 \\ -3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \cdot x - \frac{3}{2} x = 0$

$\iff x = \frac{3}{4} y$

$\Rightarrow e_1^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 3\lambda \\ 4\lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{C} \right\}$

Cerchiamo un vettore non isotropo in $e_1^\perp$:
Prendo per esempio il vettore
$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 3e_1 + 4e_2$

Calcolo $\varphi(v, v) = (3\ 4) \begin{pmatrix} 2 & -3/2 \\ -3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = -10 \neq 0$

(ALTRO MODO PER CALCOLARLO
oppure $\varphi(v, v) = \varphi(3e_1 + 4e_2, 3e_1 + 4e_2) =$
$= 9\varphi(e_1, e_1) + 24\varphi(e_1, e_2) + 16\varphi(e_2, e_2)$
$= 18 - 24 \cdot \frac{3}{2} + 8 = -10 \neq 0$)

RIC: $\varphi(e_i, e_j)$ GUARDO LE POSIZIONI DELLA MATRICE

$\Rightarrow$ v non è isotropo ed $v \in e_1^\perp$
$\Rightarrow$ è tale che $\varphi(v, e_1) = 0$

$\Rightarrow$ Se enioreo $E' = \{e_1, v\}$

è una base ortogonale e la matrice associata a φ rispetto a questa base è

$$M_{E'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}$$

ORTONORMALIZZO LA BASE E'

Ora per avere la forma canonica procedo con nei punti precedenti

Enioreo $v_1 = \frac{e_1}{\sqrt{\varphi(e_1, e_1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e_1$

$v_2 = \frac{v}{\sqrt{\varphi(v,v)}} = \frac{1}{\sqrt{-10}} v = \frac{1}{i\sqrt{10}} v$

Quindi la nuova base $E'' = \{v_1, v_2\}$ $\Rightarrow$ BASE ORTONORMALE

è tale che $M_{E''}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

✓ FORMA CANONICA

$\hookrightarrow$ ESERCIZIO COMPLETATO

METODO 2 $\rightarrow$ PER CALCOLARE UN VETTORE ORTOGONALE AD ~~e~~ e_1

Dato un vettore non isotropo (nel nostro caso e_1) ~~posso calcolare~~ e dato un vettore $w \in V$ posso calcolare il coefficiente di FOURIER di w rispetto ad e_1 (non isotropo)

$$a_{e_1}(w) = \frac{\varphi(e_1, w)}{\varphi(e_1, e_1)}$$

Ora avete dimostrato ad lezione che il vettore $w - a_{e_1}(w) \cdot e_1$ è un vettore ortogonale ad e_1, ovvia tale che

$$\varphi(e_1, w - a_{e_1}(w) \cdot e_1) = 0$$

Scelgo $w = e_2$

Allora il vettore $v = e_2 - \frac{\varphi(e_1, e_2)}{\varphi(e_1, e_1)} \cdot e_1 =$

$$= e_2 - \frac{-\frac{3}{2}}{2} \cdot e_1 =$$

$$= e_2 + \frac{3}{4} e_1 = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

è un vettore tale che $\varphi(v, e_1) = 0 \Rightarrow v \in e_1^{\perp}$

Calcolo inoltre

$$\varphi(v, v) = \varphi\left(e_2 + \frac{3}{4} e_1, e_2 + \frac{3}{4} e_1\right) =$$

$$= \varphi(e_2, e_2) + \frac{9}{8} \varphi(e_1, e_2) + \frac{9}{16} \varphi(e_1, e_1)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{27}{16} + \frac{9}{16} \cdot 2 = \frac{1}{2} - \frac{9}{16} = \frac{8-9}{16} = \frac{1}{16}$$

$\Rightarrow$ Se $E' = \{e_1, v\}$ abbiamo che

$$M_{E'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{\% ORTONORMALIZZO la base } E'}$

$v_1 = \frac{e_1}{\sqrt{\varphi(e_1, e_1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e_1 \Rightarrow$

$v_2 = \frac{v}{\sqrt{\varphi(v, v)}} = \frac{1}{\sqrt{-1/16}} v$

$E = \{v_1, v_2\}$ e tale che

$$M_{E''}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 6

Diagonalizzazione canonica delle seguenti forme quadratiche $q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

1) $q(x,y) = 3x^2 - 8xy + 3y^2$

Sia φ la forma bilineare polare associata alla forma quadratica, la matrice associata rispetto alla base canonica $E = \{e_1, e_2\}$ è

$$M_E(\varphi) = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = (\varphi(e_i, e_j))_{\substack{1 \le i \le 2 \\ 1 \le j \le 2}}$$

$\Rightarrow \varphi(e_1, e_1) = 3$

$\varphi(e_1, e_2) = \varphi(e_2, e_1) = -4$

$\varphi(e_2, e_2) = 3$

Diagonalizzo $M_E(\varphi)$

Scelgo un vettore non isotropo, per esempio e_1, infatti $\varphi(e_1, e_1) = 3 \neq 0$

Quindi $v_1 = e_1$

Voglio un vettore ortogonale ad e_1, procedo come nell'esercizio prec con i coefficienti di FOURIER

$$v_2 = e_2 - \frac{\varphi(e_1, e_2)}{\varphi(e_1, e_1)} \cdot e_1 = e_2 - \frac{(-4)}{3} \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow E' = \{ v_1, v_2 \} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una

base ortogonale, infatti $\varphi(v_1, v_2) = 0$

La matrice diagonale ottenuta è la seguente

$$M_{E'}(\varphi) = (\varphi(v_i, v_j))_{i,j}$$

- $\varphi(v_1, v_1) = \varphi(e_1, e_1) \Rightarrow$

- $\varphi(v_2, v_2) = \varphi\left(e_2 + \frac{4}{3} e_1, e_2 + \frac{4}{3} e_1\right) =$

$$= \varphi(e_2, e_2) + \frac{8}{3} \varphi(e_1, e_2) + \frac{16}{9} \varphi(e_1, e_1)$$

$$= 3 + \frac{8}{3}(-4) + \frac{16}{9} \cdot 3 = -\frac{7}{3}$$

- $\varphi(v_1, v_2) = \varphi\left(e_1, e_2 + \frac{4}{3} e_1\right) = \varphi(e_1, e_2) + \frac{4}{3}\varphi(e_1, e_1)$

$$= -4 + \frac{4}{3} \cdot 3 = 0$$

$$\Rightarrow M_{E'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -\frac{17}{3} \end{pmatrix}$$

INOLTRE DETERMINARE

a) Rango, segnatura, e forma canonica

Per svolgere questo punto dobbiamo ortonormalizzare la base

- $v_1' = \dfrac{v_1}{\sqrt{\varphi(v_1, v_1)}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}}$

- $v_2' = \dfrac{v_2}{\sqrt{-\varphi(v_2, v_2)}} = \dfrac{v_2}{\sqrt{-17/3}}$ → metto il meno poiché sono in $\mathbb{R}$

Data $E'' = \{v_1, v_2\}$ Abbiamo che

$$M_{E''}(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \to \text{FORMA CANONICA DI SILVESTER}$$

- Segnatura $(1, 1, 0)$
- Rango $= 2$

2) La forma canonica di SYLVESTER della forma quadratica del punto (2) è $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ed essendo la stessa del punto (1)

Deduciamo che le matrici $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 4 & -9/2 \\ -9/2 & 5 \end{pmatrix}$ sono congruenti

ESERCIZIO 7

Trovare tutti i vettori isotropi di $\mathbb{R}^2$ rispetto alla forma bilineare simmetrica $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita

definita come $\phi(u, v) = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 2y_1y_2$

dove $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$

sol

$$M_E(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

I vettori isotropi rispetto a ϕ sono i vettori $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tali che

$$(x_1\ x_2)\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow\ (x_1\ x_2)\begin{pmatrix}2x_1-2x_2\\ -2x_1+2x_2\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow\ 2x_1^2-2x_1x_2-2x_1x_2+2x_2^2=0$$

$$\Leftrightarrow\ 2x_1^2-4x_1x_2+2x_2^2=0$$

$$\Leftrightarrow\ x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=0$$

$$\Leftrightarrow\ (x_1-x_2)^2=0$$

ovvero i vettori isotropi sono i vettori del sottospazio $\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$

Esercizio 8

Data una matrice $M = (a_{ij})_{i,j}$

Abbiamo che $Tr(M) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

Sia $V = M_2(\mathbb{R})$ e sia $X \in M_2(\mathbb{R})$

Consideriamo $f_X : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f_X(A, B) = Tr({}^tA \, X \, B)$$

1) Si dimostri che f_X è una forma bilineare

sol

La Bilinearità di f_X discende dalle proprietà di linearità della Traccia

1) $Tr(M_1 + M_2) = Tr(M_1) + Tr(M_2)$

2) $Tr(kM) = k\,Tr(M)$

$\forall\ M_1, M_2, M \in M_2(\mathbb{R})$ e $\forall\ k \in \mathbb{R}$

2) Si determini $M_e(f_X)$, la matrice rispetto alla base canonica di V che ricordiamo è data da

$$e = \left\{ \underset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{e_2}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{e_3}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{e_4}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \right\}$$

sol

Sia $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$f_X(e_1, e_1) = Tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = a$

$f_X(e_1, e_2) = Tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$

$f_X(e_1, e_3) = Tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = b$

$f_X(e_1, e_4) = Tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0$

$f_X(e_2, e_2) = Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = a$

$f_X(e_2, e_3) = Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$

$f_X(e_2, e_4) = Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = b$

$f_X(e_3, e_1) = Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = a$

$f_X(e_3, e_2) = Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = a$

$f_X(e_3, e_3) = Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = d$

$f_X(e_3, e_4) = Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = b$

$f_X(e_4, e_1) = Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$

$f_X(e_4, e_2) = Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = c$

$f_X(e_4, e_3) = Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$

$f_X(e_4, e_4) = Tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = d$

$$M_e(f_X) = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$$

3) Si stabilisca per quali X si ha che $M_e(f_X)$ è non degenere per quali simetrico e per quali antisimetrica

Sol

f_X è simetrica $\Leftrightarrow$ $M_e(f_X)$ è simetrica

$\Leftrightarrow b = c \Leftrightarrow X$ è simetrica

$\Leftrightarrow f_X$ è antimetrica $\Leftrightarrow$

$M_e(f_X)$ è anti $\Leftrightarrow a = d = 0 \wedge b = -c$

$\Leftrightarrow X$ è antisimetrica

$\iff$ f_X è non degenere

$\iff$ $M_e(f_X)$ è non degenere.

$\iff$ $\det(M_e(f_X)) \neq 0$

$\iff$ $(ad-bc)^2 \neq 0$

$\iff$ $a \cdot d - bc \neq 0$

$\iff$ $\det X \neq 0$

$\iff$ X è non degenere