Università degli Studi di Roma Tre, A.A. 2023/2024
Corso di Laurea Triennale in Fisica e Matematica
GE210 - Geometria e Algebra Lineare 2

Docente: Angelo Felice Lopez
Esercitatore: Luca Schaffler
Tutori: Ilaria Cruciani, Michele Matteucci

Tutorato 1

Esercizio 1. Dato lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^n$, stabilire se l'applicazione $\phi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ è bilineare.

(*i*) $\phi(u, v) = \sum_{j=1}^{n} x_j |y_j|$

(*ii*) $\phi(u, v) = \left| \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \right|$

(*iii*) $\phi(u, v) = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \right) \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \right)$

(*iv*) $\phi(u, v) = \sum_{j=1}^{n} (x_j + y_j)^2 - \sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \sum_{j=1}^{n} y_j^2$

dove $u = (x_1, \dots, x_n)$ e $v = (y_1, \dots, y_n)$.

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}^3$, consideriamo su V la base canonica $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ e la base $F = \{e_1 - e_2, e_3, e_2 + e_3\}$. Consideriamo la seguente forma bilineare

$$\begin{aligned} \phi : V \times V &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\to x_1 y_1 - x_2 y_2 \end{aligned}$$

dove $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$. Svolgere le seguenti richieste:

(i) Calcolare le matrici $M_E(\phi)$ e $M_F(\phi)$.

(ii) Calcolare nuovamente $M_F(\phi)$, ma con la formula di cambiamento di base.

(iii) Esplicitare il rango di tale forma bilineare.

(iv) Stabilire se la base canonica e la base F sono basi ortogonali per ϕ.

Esercizio 3. Senza diagonalizzarle, dire se le seguenti matrici simmetriche sono definite positive o definite negative:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 7 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4. In ciascuno dei seguenti casi si considerino le seguenti forme quadratiche $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Determinare la forma bilineare polare e la sua matrice associata:

(i) $q(x, y, z) = 10x^2 + 3xy + 5y^2 + 4z^2$;

(ii) $q(x, y, z) = 3x^2 + 10xy + y^2$;

(iii) $q(x, y, z) = x^2 - 2xz - y^2 - z^2$;

(iv) $q(x, y, z) = 5x^2 + 3y^2 + xz$.

Esercizio 5. In ciascuno dei seguenti casi determinare una base rispetto alla quale la forma quadratica $q\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ assuma la forma canonica:

(i) $q(x, y) = ix^2 - 2y^2$;

(ii) $q(x, y) = 36x^2 - 121y^2$;

(iii) $q(x, y) = -x^2 + y^2$;

(iv) $q(x, y) = 2x^2 - 3xy + \frac{1}{2}y^2$.

Esercizio 6. Diagonalizzare ciascuna delle seguenti forme quadratiche $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

(i) $q(x, y) = 3x^2 - 8xy + 3y^2$;

(ii) $q(x, y) = 4x^2 - 9xy + 5y^2$.

Inoltre determinare:

(a) Rango, segnatura e forma canonica di Sylvester;

(b) Se le matrici associate alle forme bilineari (associate a loro volta alle forme quadratiche) sono congruenti o meno.

Esercizio 7. Trovare tutti i vettori isotropi di $\mathbb{R}^2$ rispetto alla forma bilineare simmetrica $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come $\phi(u, v) = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 2x_2y_2$, dove $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$.

Esercizio 8. Data una matrice M, ricordare che la *traccia* di M, denotata con $\mathrm{tr}(M)$, è la somma delle entrate lungo la diagonale di M. Sia $V = M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate 2×2 a entrate in $\mathbb{R}$. Fissiamo una matrice $X \in M_2(\mathbb{R})$. Si consideri l'applicazione $f_X : V \times V \to \mathbb{R}$ definita come $f_X(A, B) = \mathrm{tr}({}^tAXB)$.

(*i*) Si dimostri che f_X è una forma bilineare

(*ii*) Si determini $M_{\mathbf{e}}(f_X)$, la matrice di f_X rispetto alla base canonica di V, che ricordiamo è data da

$$\mathbf{e} = \{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \}$$

(*iii*) Si stabilisca per quali X si ha che $M_{\mathbf{e}}(f_X)$ è non degenere, per quali è simmetrica, e per quali antisimmetrica