TUTORATO 2

ES 1

Sia $V = \mathbb{R}^3$, si consideri la seguente forma bilineare simmetrica (scritta rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$).

$$\phi(U,V) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 - x_2y_2 - x_1y_3 - x_3y_1$$
$$-2x_2y_3 - 2x_3y_2 - 4x_3y_2$$

1) Determinare il rango

Sappiamo che il rango di φ è il rango di $M_E(\varphi)$, con $E = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ base canonica

$$M_E(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Si ha che $\det M_E(\varphi) \neq 0 \Rightarrow \text{rango } \varphi = 3$

2) Determinare il radicale di φ

$\text{Rad } \varphi = \{ V \in \mathbb{R}^3 : \varphi(U,V) = 0 \quad \forall U \in \mathbb{R}^3 \}$

Quindi $0 = \varphi(U,V) = U^t M_E(\varphi) V \quad \forall U \in \mathbb{R}^3$

$$\Leftrightarrow M_E(\varphi) V = 0 \Rightarrow$$

Il radicale coincide con lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo con la matrice dei coefficienti uguale a $M_E(\varphi)$.

c) Trova una base rispetto alla quale la forma si scrive in forma canonica di Sylvester.

Sia $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ base canonica

Voglio un vettore non isotropo rispetto alla forma bilineare.

- Noto e_1 è non isotropo, infatti $\varphi(e_1, e_1) = 2 \neq 0$

- Cerco lo spazio ortogonale ad e_1

ovvero voglio trovare tutti i vettori v tali che

$\varphi(e_1, v) = 0$

Ora $0 = \varphi(e_1, v) = e_1^t \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$

$= (2\ 0\ 0) \cdot \begin{pmatrix} 2x - y - z \\ -x - y - 2z \\ -x - 2y - 4z \end{pmatrix} = 2x - y - z$

$\Leftrightarrow 2x - y - z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = +2t - s \end{cases}$

$\Rightarrow e_1^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \underbrace{e_1 + 2e_3}_{v_1}, \underbrace{e_2 - e_3}_{v_2} \rangle$

- Voglio un altro vettore non isotropo

$\varphi(v_1, v_1) = \varphi(e_1 + 2e_3, e_1 + 2e_3) =$

$= \varphi(e_1, e_1) + 4\varphi(e_1, e_3) + 4\varphi(e_3, e_3) =$

$= 2 - 4 - 16 = -18 \neq 0$

$\Rightarrow$ v_1 è non isotropo

Ora cerco $v_1^\perp \cap e_1^\perp$ (e tali che $\varphi(v_1, e_1) = 0$)

$v_1^\perp$ è ciò tale che $\varphi(v_1, \bar{x}) = 0$

$$0 = \varphi(v_1, \bar{x}) = v_1^t \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= (1\ 0\ 2) \begin{pmatrix} 2x - y - z \\ -x - y - 2z \\ -x - 2y - 4z \end{pmatrix} =$$

$$= 2x - y - z + 2(-x - 2y - 4z) =$$

$$= \cancel{2}x - y - z - \cancel{2}x - 4y - 8z =$$

$$= -5y - 9z$$

$\Rightarrow$ $v_1^\perp$ è dato dalle soluzioni di

$$-5y - 9z = 0 \quad (**)$$

$\Rightarrow$ Ora $e_1^\perp \cap v_1^\perp$ è retta sistema $(*)$ e $(**)$

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -5y - 9z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{5}z + z\right) \\ y = \frac{9}{5}z \end{cases} \Rightarrow$$

$$y = \frac{9}{5}z$$

$$\begin{cases} x = \frac{7}{5}z \\ y = \frac{9}{5}z \end{cases}$$

$$\Rightarrow e_1^\perp \cap v_1^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 7\lambda \\ 9\lambda \\ 5\lambda \end{pmatrix} \ \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \langle 7e_1 + 9e_2 + 5e_3 \rangle = W_1$$

$\Rightarrow$ la base $E' = \{e_1, v_1, w_1\} =$

$= \{e_1, e_1+2e_3, 7e_1+9e_2+5e_3\}$

$\bar{e}$ tale che $M_E(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi(e_1,e_1) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi(v_1,v_1) & 0 \\ 0 & 0 & \varphi(w_1,w_1) \end{pmatrix}$

Ora $\varphi(e_1,e_1) = 2$ (positivo)

$\varphi(v_1,v_1) = -18$ (negativo)

$\varphi(w_1,w_1) = \varphi(7e_1+9e_2+5e_3, 7e_1+9e_2+5e_3)$

$= 49\varphi(e_1,e_1) + 126\varphi(e_1,e_2) + 81\varphi(e_2,e_2)$

$+ 70\varphi(e_1,e_3) + 90\varphi(e_2,e_3) + 25\varphi(e_3,e_3)$

$= 98 - 126 - 81 - 70 - 180 - 100 =$

$= -459$ (negativo)

controllare i calcoli

$\Rightarrow$ le bancano $z_1 = \dfrac{e_1}{\sqrt{\varphi(e_1,e_1)}}$

$z_2 = \dfrac{e_2}{\sqrt{-\varphi(e_2,e_2)}}$

$z_3 = \dfrac{e_3}{\sqrt{-\varphi(e_3,e_3)}}$

$E'' = \{z_1, z_2, z_3\}$

ottengo che

$M_{E''}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ FORMA CANONICA DI SYLVESTER

$\varphi(c_n, t_n)$

ESERCIZIO 2

$\varphi(x,y) = 6x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + 5x_1y_3 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 + 6x_3y_3$

$$M_e(\varphi) = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad e = \{e_1, e_2, e_3\}$$

$\boxed{\text{PRIMO PASSO}}$: TROVO UN VETTORE NON ISOTROPO

e_1 È NON ISOTROPO

- $\varphi(e_1, e_1) = 6 \neq 0$

COSTRUISCO LA BASE $e' = \{v_1, v_2, v_3\}$

$v_1 = e_1$
$v_2 = e_2$
$v_3 = e_3$

(NOTA IN QUESTO CASO $e = e'$)

$\boxed{\text{SECONDO PASSO}}$

COSTRUISCO $\mathcal{C}'' = \{w_1, w_2, w_3\}$

$w_1 = v_1 = e_1$

$$w_2 = v_2 - \frac{\varphi(v_2, w_1)}{\varphi(w_1, w_1) \neq 0} \cdot w_1 = e_2 - \frac{\varphi(e_2, e_1)}{\varphi(e_1, e_1)} e_1 = e_2 - \frac{1}{6} e_1$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\varphi(v_3, w_1)}{\varphi(w_1, w_1) \neq 0} w_1 = e_3 - \frac{\varphi(e_3, e_1)}{\varphi(e_1, e_1)} e_1 = e_3 - \frac{5}{6} e_1$$

La base $\mathcal{C}'' = \{w_1, w_2, w_3\}$ è tale che $M_{\mathcal{C}''}(\varphi) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\ } & \\ 0 & & \end{pmatrix}$

(verificare in caso per correttezza di calcoli che $\varphi(w_1, w_2) = \varphi(w_1, w_3) = 0$)

$\boxed{\text{3 PASSO}}$ COSTRUISCO $\mathcal{C}''' = \{z_1, z_2, z_3\}$

ANALIZZO i vettori $\{w_2, w_3\}$ e cerco uno non isotropo

$$\varphi(w_2, w_2) = \varphi\left(e_2 - \frac{1}{6} e_1, e_2 - \frac{1}{6} e_1\right) =$$

$$= \varphi(e_2, e_2) - \frac{1}{6} \varphi(e_2, e_1) - \frac{1}{6} \varphi(e_1, e_2) + \frac{1}{36} \varphi(e_1, e_1) =$$

$$= 1 - \frac{1}{6} - \cancel{\frac{1}{6}} + \cancel{\frac{1}{6}} = \frac{5}{6} \neq 0 \Rightarrow w_2 \text{ NON ISOTROPO}$$

Pongo

$z_1 = w_1$

$z_2 = w_2$ (è non isotropo)

$$z_3 = w_3 - \frac{\varphi(w_3, z_2)}{\underbrace{\varphi(z_2, z_2)}_{= \varphi(w_2, w_2)}} z_2 = w_3 - \frac{1/6}{\frac{5}{6}} \cdot z_2 = w_3 - \frac{1}{5} z_2$$

$$\varphi(w_3, z_2) = \varphi(w_3, w_2) = \varphi\left(e_3 - \frac{5}{6} e_1, e_2 - \frac{1}{6} e_1\right) =$$

$$= \varphi(e_3, e_2) - \frac{5}{6} \varphi(e_1, e_2) - \frac{1}{6} \varphi(e_1, e_3) + \frac{1}{36} \varphi(e_1, e_1) =$$

$$= 2 - \frac{5}{6} - \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = \frac{12 - 5 - 5 + 1}{6} = \frac{1}{6}$$

La base ~~B''~~ $e'' = \{z_1, z_2, z_3\}$ è tale che $M_{e''}(\varphi) = \begin{pmatrix} \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$

a) IL RADICALE: ~~[illegible]~~

sono i vettori tali che $\varphi(x,y) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\varphi(x,y) = x^t \underbrace{A y}_{} = 0$

$\longrightarrow$ RISOLVERE $Ax = 0$

$\Downarrow$

TROVA IL KER dell'applicazione φ

con $\varphi : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$

$x \longrightarrow Ax$

($\Rightarrow$ trova le soluzioni del sistema Ax)

b) Rango è il rango della matrice A

d) le matrici nei punti ① e ② sono congruenti se hanno la stessa segnatura

Una volta AVER TROVATO LA BASE ORTOGONALE SI TRATTA SOLO DI NORMALIZZARE LA MATRICE ED IL CALCOLO DELLA SEGNATURA È ANALOGO AGLI ES ② e ③

ESERCIZIO 3

Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcolare la matrice $B = A^t (A) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

b) Scrivere la forma bilineare simmetrica $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ avente come matrice associata rispetto alla base la matrice B: siano $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e $x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$

Si ha

$$\varphi(x, x') = x^t B x = 5x_1x_1' + x_2x_2' + 2x_1x_3' + x_1'x_2 + 5x_2x_2'$$
$$-2x_2x_3' - 2x_2'x_3 + 2x_3x_3' + 2x_1'x_3$$

c) Consideriamo il vettore $v_\lambda = (1-\lambda, 2-\lambda, \lambda)$ e F_λ il sottospazio di vettori x tali che $\varphi(v_\lambda, x) = 0$

al variare di parametri λ reali: calcolare la dimensione dell'intersezione $F_\lambda \cap W$ dove W è il sottospazio avente come base i vettori $w_1 = (1, -1, 0)$ e $w_2 = (0, 0, 1)$

Sia $z \in W \Rightarrow z = t_1 w_1 + t_2 w_2 \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

Allora $z \in F_\lambda \cap W \iff \exists\, t_1, t_2$ tali che

$$b(v_\lambda, z) = b(v_\lambda, t_1w_1 + t_2w_2) = t_1 b(w_1, v_\lambda) + t_2 b(w_2, v_\lambda) = 0$$

$$b(w_1, v_\lambda) = 5(1-\lambda) + (2-\lambda) + 2\lambda - (1-\lambda) - 5(2-\lambda) + 2\lambda$$

$$b\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-\lambda \\ 2-\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}\right) = 4 - 4\lambda - 4(2-\lambda) + 4\lambda = 4 - 8\lambda + 4\lambda = -4\lambda + 4$$

$$b(w_2, v_\lambda) = -2(2-\lambda) + 2\lambda + 2(1-\lambda) = -4 + 2\lambda + \cancel{2\lambda} + 2 - \cancel{2\lambda} = 2\lambda - 2$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1-\lambda \\ 2-\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow b(v_\lambda, z) = t_1(-4\lambda + 4) + t_2(2\lambda - 2) = 0 \Rightarrow$$

- se $\lambda = 1 \Rightarrow b(v_\lambda, t) = 0 \quad \forall\, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ poiché $t = t_1 w_1 + t_2 w_2$

  si ha $F_\lambda \cap W = W \Rightarrow \dim(F_\lambda \cap W) = \dim(W) = 2$

- se $\lambda \neq 1 \quad t_1 = -t_2 \dfrac{(2\lambda - 2)}{(-4\lambda + 4)} \Rightarrow \dim(F_\lambda \cap W) = 1$

ES 4

Si determini una base ortonormale f di $\mathbb{R}^3$ rispetto al prodotto scalare standard applicando il procedimento di Gram-Schmidt alla base v dei vettori

$v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (0,1,1)$, $v_3 = (0,1,-1)$

Si verifichi che la matrice del cambiamento di base dalla base f alla base canonica è una matrice ortogonale

Sol

Dati $v_1 = (x_1, x_2, x_3)$ e $v_2 = (y_1, y_2, y_3)$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

Gram-Schmidt:

$w_1 = v_1$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle w_1, v_2 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} v_1 = v_2 - \frac{1}{2} v_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\overbrace{\langle w_2, v_3 \rangle}^{=1/2}}{\underbrace{\langle w_2, w_2 \rangle}_{=3/2}} w_2 - \frac{\overbrace{\langle w_1, v_3 \rangle}^{=-1}}{\underbrace{\langle w_1, w_1 \rangle}_{=2}} w_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

Ora normalizziamo i seguenti vettori

$$\vec{f_1} = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\vec{f_2} = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\vec{f_3} = \frac{\vec{w_3}}{\|w_3\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

è la base ortonormale

Sia $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2}/3 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ la matrice del cambiamento di base dalla base f alla base canonica

allora A verifica $AA^T = Id \Rightarrow$ è ortogonale

Esercizio 3

Utilizzando le procedimento di GRAM-SCHMIDT ortogonalizzo la base canonica di $\mathbb{R}^4$ rispetto al prodotto scalare

$$\langle x, y \rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_1y_1 + x_3y_3 + x_3y_4 + x_4y_3 + 2x_4y_4$$

sol

la matrice associata nella base canonica è $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\varphi(e_1, e_1) = 2 \neq 0$ ok non isotropo

$v_1 = e_1$

$$v_2 = e_2 - \frac{\varphi(v_1, e_2)}{\varphi(v_1, v_1)} \cdot v_1 = e_2 - \frac{e_1}{2}$$

$$v_3 = e_3 - \frac{\varphi(v_1, e_3)}{\varphi(v_1, v_1)} v_1 - \frac{\varphi(v_2, e_3)}{\varphi(v_2, v_2)} \cdot v_3 = e_3$$

$$v_4 = e_4 - \frac{\varphi(v_1, e_4)v_1}{\varphi(v_1, v_1)} - \frac{\varphi(v_2, e_4)}{\varphi(v_2, v_2)} \cdot v_2 - \frac{\varphi(v_3, e_4)v_3}{\varphi(v_3, v_3)} = e_4 - e_3$$

la base B è $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

(Potrei verificare anche facendo $B^t A B = D$ diagonale

dove $B = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Es 4

Si determini una base orto[...] rispetto al prodotto scalare standard [...] di Gram-Schmidt alla [...]

$v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, [...]$

Si verifichi che la matrice [...] base f della base can[...]

sol

Dati $v_1 = (x_1, x_2, x_3)$ e [...]

$\langle v_1, v_2 \rangle = x_1y_1 + x_2y[...]$

Gram-Schmidt

$w_1 = v_1$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle w_1, v_2 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} v_1 = [...]$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle w_2, v_3 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} [...]$$

Ortonormalizzo

$$\vec{f}_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 [...]\right.$$

$$\vec{f}_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}} [...]\right.$$

$$\vec{f}_3 = \frac{\vec{w}_3}{\|w_3\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} [...]\right.$$

sia $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & [...] \\ 0 & [...] \\ 1/\sqrt{2} & [...] \end{pmatrix}$

allora A [...]

Esercizio 5

Utilizzando il procedimento di GRAM-SCHMIDT ortogonalizzare la base canonica di $\mathbb{R}^4$ rispetto al prodotto scalare

$$\langle x, y \rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_1y_1 + x_3y_3 + x_3y_4$$
$$+ x_4y_3 + 2x_4y_4$$

sol: verificare che è un prodotto scalare.

la matrice associata nella base canonica è $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\varphi(e_1, e_1) = 2 \neq 0$ ok non isotropo

$v_1 = e_1$

$$v_2 = e_2 - \frac{\varphi(v_1, e_2)}{\varphi(v_1, v_1)} \cdot v_1 = e_2 - \frac{e_1}{2}$$

$$v_3 = e_3 - \frac{\varphi(v_1, e_3)}{\varphi(v_1, v_1)} v_1 - \frac{\varphi(v_2, e_3)}{\varphi(v_2, v_2)} \cdot v_3 = e_3$$

$$v_4 = e_4 - \frac{\varphi(v_1, e_4)}{\varphi(v_1, v_1)} v_1 - \frac{\varphi(v_2, e_4)}{\varphi(v_2, v_2)} \cdot v_2 - \frac{\varphi(v_3, e_4)}{\varphi(v_3, v_3)} v_3 = e_4 - e_3$$

la base B è $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

(potrei verificare anche facendo $B^T A B = D$ diagonale

dove $B = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

... che $b_1 > 0$, $b_2 > 0$ e $b_3 > 0$ ...

Esercizio 6

Sia $V = \mathbb{R}_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado 3 a coefficienti in $\mathbb{R}$ dotato del prodotto scalare standard

$$\langle a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \rangle = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

d) Dopo aver verificato che i seguenti polinomi costituiscono una base per V, applicare ad essi il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt:

$$t+1, \quad t+t^2, \quad 2-t-t^3, \quad t^3$$

sol

Per vedere se i polinomi $t+1$, $t+t^2$, $2-t-t^3$, t^3 sono una base di V verifico che sono linearmente indip. e poiché sono 4 deduco che sono una base:

$$a(t+1) + b(t+t^2) + c(2-t-t^3) + d t^3 = 0$$

$at + a + bt + bt^2 + 2c - ct - ct^3 + dt^3 = 0$

$a + 2c + t(a+b-c) + t^2 b + t^3(d-c) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a+2c = \\ a+b-c=0 \\ b=0 \\ d-c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ c=0 \\ b=0 \\ d=0 \end{cases}$

Applichiamo il proc di Gram Schmitt

chiamo $v_1 = t+1$, $v_2 = t+t^2$, $v_3 = 2-t-t^3$, $v_4 = t^3$

$w_1 = t+1$

$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = t+t^2 - \frac{1}{2}(t+1) = \frac{1}{2}t + t^2 - \frac{1}{2}$

$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 = 2-t-t^3 - \frac{1}{2}(1+t) + \left(\frac{1}{2}t + t^2 - \frac{1}{2}\right) =$

$= 1 - t + t^2 - t^3$

$w_4 = v_4 - \frac{\langle v_4, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_4, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 - \frac{\langle v_4, w_3 \rangle}{\langle w_3, w_3 \rangle} w_3 = \frac{3}{4}t^3 + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}t + \frac{1}{4}$

NORMALIZZIAMO i vettori e otteniamo

$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{t}{\sqrt{2}}$

$w_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}\,t}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}\,t^2}{\sqrt{3}}$

$w_3 = \frac{1}{2} - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{2}$

$w_4 = \frac{3t^3}{2\sqrt{3}} + \frac{t^2}{2\sqrt{3}} - \frac{t}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}$

b) DATO il sottospazio $U = \langle t^3 - 1, t+2 \rangle$ di V calcolare $U^\perp$.

scrivere una base ortonormale di U e $U^\perp$

suppongo che un vettore appartiene a $U^\perp$ se

$\langle v, t^3 - 1 \rangle = 0$ se $v = x + yt + zt^2 + wt^3$ si ha:

$\langle v, t + 2 \rangle = 0$

$$\begin{cases} \langle t^3 - 1, v \rangle = 0 \\ \langle t + 2, v \rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w = x \\ y = -2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u \\ w = u \\ y = -2u \\ z = a \end{cases}$$

$\Rightarrow U^\perp = \langle 1 - 2t + t^3, t^2 \rangle$

• Procedimento di Gram Smith per U

- $w_1 = t^3 - 1$

$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = t + 2 + (t^3 - 1) = t^3 + t + 1$

NORMALIZZO

$w_1 = \frac{t^3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$

$w_2 = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} t - \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{7}} t^3$

Invece per $U^\perp$ ho

$v_1 = 1 - 2t + t^3$ e $v_2 = t^2$ e noto che sono già ortogonali

$\Rightarrow w_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{2}{\sqrt{6}} t + \frac{t^3}{\sqrt{6}}$

$w_2 = t^2$

Esercizio 8

Consideriamo lo spazio vettoriale $V = \{a\cos x + b\sin x \mid a,b \in \mathbb{R}\} \subset C^\infty([0,\pi])$

verificare che la funzione

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(f,g) \longrightarrow \int_0^\pi f(x)\,g(x)\,dx$$

è un prodotto scalare che denoteremo $\langle -,- \rangle$

Mostrare che $\cos x + \sin x$ e $2\cos x + \sin x$ sono una base e applicarvi Gram-Schmidt

Sol

- È Bilineare

$\circ\ \langle f+f', g \rangle = \int_0^\pi (f+f')g = \int_0^\pi fg + \int_0^\pi f'g = \langle f,g \rangle + \langle f',g \rangle$

$\circ\ \langle f, g+g' \rangle \underset{\text{analogo}}{=} \langle f,g \rangle + \langle f, g' \rangle$

$\circ\ \langle cf, g \rangle = \int_0^\pi cfg = c\int_0^\pi fg = c\langle f,g \rangle$

- Simmetrica

$\langle f,g \rangle = \int_0^\pi fg = \int_0^\pi gf = \langle f,g \rangle$

- Definita positiva

$\langle f,f \rangle = \int_0^\pi f^2 \geq 0$

- $\cos x + \sin x$ e $2\cos x + \sin x$ sono una base

$a(\cos x + \sin x) + b(2\cos x + \sin x) = 0 \Rightarrow$

$\cos x(a+2b) + \sin x(a+b) = 0$

seno e coseno non si annullano mai contemporaneamente

$$\Rightarrow \begin{cases} a+2b = 0 \\ (a+b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Esercizio 8

Consideriamo lo spazio vettoriale $V = \{a \cos x + b \sin x \mid a,b \in \mathbb{R}\} \subset C^0([0,\pi])$
verificare che la funzione

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(f,g) \longrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx$$

è un prodotto scalare che denoteremo $\langle \cdot , \cdot \rangle$

Mostrare che $\cos x + \sin x$ e $2\cos x + \sin x$ sono una base
e applicarvi Gram-Schmidt.

Sol

- È bilineare

$\circ$ $\langle f+f', g \rangle = \int_0^{\pi} (f+f')g = \int_0^{\pi} fg + \int_0^{\pi} f'g = \langle f,g \rangle + \langle f',g \rangle$

$\circ$ $\langle f, g+g' \rangle \underset{\text{analogo}}{=} \langle f,g \rangle + \langle f, g' \rangle$

$\circ$ $\langle cf, g \rangle = \int_0^{\pi} cfg = c\int_0^{\pi} fg = c\langle f,g \rangle$

- Simmetrica

$\langle f,g \rangle = \int_0^{\pi} fg = \int_0^{\pi} gf = \langle f,g \rangle$

- Definita positiva

$\langle f,f \rangle = \int_0^{\pi} f^2 \geq 0$

- $\cos x + \sin x$ e $2\cos x + \sin x$ sono una base

$a(\cos x + \sin x) + b(2\cos x + \sin x) = 0 \Rightarrow$

$\cos x (a+2b) + \sin x (a+b) = 0$

seno e coseno non si annullano mai contemporaneamente

$$\Rightarrow \begin{cases} a+2b = 0 \\ (a+b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Sia $v_1 = \cos x + \sin x$ e $v_2 = 2\cos x + \sin x$

$C^\infty[0,\pi]$

$w_1 = v_1$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle w_1, v_2\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 = 2\cos x + \sin x - \frac{\frac{3\pi}{2}}{\pi} (\cos x + \sin x) = \otimes$$

$$\langle w_1, v_2\rangle = \int_0^\pi (\cos x + \sin x)(2\cos x + \sin x) = \int_0^\pi 2\cos^2 x + 3\cos x \sin x + \sin^2 x$$

$$= 2\int_0^\pi \cos^2(x) + 3\int_0^\pi \cos(x)\sin(x) + \int_0^\pi \sin^2(x)$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}[x + \sin(x)\cos(x)] + \frac{3}{2}[\cos^2(x)]_0^\pi + \frac{1}{2}[x - \sin(x)\cos(x)] = \frac{3\pi}{2}$$

$$\langle w_1, w_1\rangle = \int_0^\pi (\cos(x) + \sin(x))^2 = \int_0^\pi \cos^2(x) + 2\int_0^\pi \cos(x)\sin(x) + \int_0^\pi \sin^2(x)$$

$$= \pi$$

$$\otimes = 2\cos x + \sin x - \frac{3}{2}\cos x - \frac{3}{2}\sin x = \frac{\cos x}{2} - \frac{1}{2}\sin x = \frac{1}{2}(\cos x - \sin x)$$

La base ortogonale è $\{w_1, w_2\}$

Per ottenere la base ortonormale divido per la norma

- $\tilde{w}_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}$
- $\tilde{w}_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|_2}$