# Università degli Studi di Roma Tre, A.A. 2023/2024
# Corso di Laurea Triennale in Fisica e Matematica
# GE210 - Geometria e Algebra Lineare 2

Docente: Angelo Felice Lopez
Esercitatore: Luca Schaffler
Tutori: Ilaria Cruciani, Michele Matteucci

Tutorato 2

**Esercizio 1.** Sia $V = \mathbb{C}^3$; si considerino su $V$ le seguenti forme bilineari simmetriche (scritte rispetto alla base canonica di $V$):

$$\phi_1(u,v) = 6x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2+5x_1y_3+5x_3y_1+2x_2y_3+2x_3y_2+6x_3y_3$$

$$\phi_2(u,v) = 5x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2+4x_1y_3+4x_3y_1+2x_2y_3+2x_3y_2+5x_3y_3$$

Per ciascuna delle precedenti forme:

(i) Determinare il rango

(ii) Determinare il radicale

(iii) Trovare una base ortogonale rispetto alla quale la forma si scriva in forma canonica

**Esercizio 2.** Sia $V = \mathbb{R}^3$; si consideri su $V$ la seguente forma bilineare simmetrica (scritta rispetto alla base canonica di $V$):

$$\phi(u,v) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 - x_2y_2 - x_1y_3 - x_3y_1 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 - 4x_3y_3$$

(i) Determinare il rango

(ii) Determinare il radicale

(iii) Trovare una base ortogonale rispetto alla quale la forma si scriva in forma canonica di Sylvester

**Esercizio 3.** Si consideri la matrice a coefficienti reali $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(i) Calcolare la matrice $B = A^T A$

(ii) Esplicitare la forma bilineare $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ avente come matrice associata rispetto alla base canonica la matrice $B$

(iii) Considerati il vettore $v_\lambda$ e i sottospazi $F_\lambda$ e $W$ definiti come

$$v_\lambda = \begin{pmatrix} 1-\lambda \\ 2-\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$
$$F_\lambda = \left\{ w \in \mathbb{R}^3 \ : \ \phi(v_\lambda, w) = 0 \right\}$$
$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

si calcoli la dimensione dell'intersezione $F_\lambda \cap W$.

**Esercizio 4.** Ortonormalizzare la base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ di $\mathbb{R}^3$ rispetto al prodotto scalare standard; chiamata $F$ la nuova base ortonormale, verificare che la matrice di cambio base dalla base canonica $E$ alla base $F$ è una matrice ortogonale.

**Esercizio 5.** Dimostrare che la forma bilineare $b : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come $b(u,v) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_3y_4 + x_4y_3 + x_4y_4$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$; quindi ortonormalizzare la base canonica di $\mathbb{R}^4$ rispetto al prodotto scalare $b$ utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt.

**Esercizio 6.** Utilizzando il procedimento di gram-Schmidt, ortonormalizzare la base canonica di $\mathbb{R}^4$ rispetto al prodotto scalare

$$\langle u, v \rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_3y_4 + x_4y_3 + 2x_4y_4$$

**Esercizio 7.** Sia $V = \mathbb{R}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 3. Consideriamo su $V$ il prodotto scalare standard:

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

(i) Verificare che l'insieme $\{1+x, x+x^2, 2-x-x^3, x^3\}$ costituisce una base di $V$, e ortonormalizzarla attraverso il procedimento di Gram-Schmidt.

(ii) Dato il sottospazio $U = \langle -1 + x^3, 2 + x \rangle$, calcolare $U^\perp$ e trovare una base ortonormale per $U$ e una base ortonormale per $U^\perp$.

**Esercizio 8.** Consideriamo lo spazio vettoriale

$$V = \{a \cos x + b \sin x \ : \ a, b \in \mathbb{R}\} \subset C^{\infty([0,\pi])}$$

Verificare che l'applicazione $\phi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$\phi(f,g) = \int_0^{\pi} f(x)g(x)dx$$

è un prodotto scalare su $V$. Dimostrare quindi che il sottinsieme $B = \{\cos x + \sin x, 2\cos x + \sin x\} \subset V$ è una base di $V$, e ortonormalizzarla utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt.