TUTORATO 3

ESERCIZIO 1

Determinare le equazioni cartesiane della retta in $\mathbb{R}^3$ passante per il punto $(0,1,0)$ la cui direzione è il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Soluzione

Le equazioni parametriche della retta sono

$$\begin{cases} x = 0 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 0 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Da cui $t = -z$ e sostituendo nelle prime e seconde equazione $t = -z$ otteniamo

$$\begin{cases} x = -2z \\ y = 1 - z \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

equazioni cartesiane della retta

Analogamente

retta passante per $(0,1,0)$ la cui direzione è $(2,1,-1)$

Si deve avere che

$$\text{rango} \begin{pmatrix} x-0 & y-1 & z-0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} < 2$$

che equivale a

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \wedge \quad \begin{vmatrix} x-0 & z-0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x - 2(y-1) = 0 \quad \wedge \quad -x - 2z = 0$$

equazioni cartesiane della retta $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ -x-2z=0 \end{cases}$

Esercizio 2

Determina l'equazione cartesiana del piano passante per il punto $(0,1,1)$ le cui direzioni sono i vettori $\begin{pmatrix}1\\0\\6\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$

Soluzione

Le equazioni parametriche del piano sono

$$\begin{cases} x = 0 + t - 2s \\ y = 1 + 3s \\ z = 1 + 6t \end{cases}$$

Da cui

$$\begin{cases} x = t - 2s \\ s = \dfrac{y-1}{3} \\ t = \dfrac{z-1}{6} \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{z-1}{6} - \frac{2(y-1)}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad 6x - z + 1 + 4y - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 6x + 4y - z - 3 = 0$$ → equazione cartesiana del piano

Analogamente

Abbiamo che

$$\text{rango}\begin{pmatrix} x-0 & y-1 & z-1 \\ 1 & 0 & 6 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} < 3$$

$$\Leftrightarrow \quad \det\begin{pmatrix} x-0 & y-1 & z-1 \\ 1 & 0 & 6 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow (z-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} x & y-2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \quad 3(z-1) - 6(3x + 2y - 4) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 3z - 3 - 18x - 12y + 12 = 0$

$\Leftrightarrow \quad -18x - 12y + 3z + 9 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 6x + 4y - z - 3 = 0$

Esercizio 3

Determinare l'equazione del piano in $\mathbb{R}^3$ passante per il punto $(0,2,7)$ e la cui direzione normale è il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

soluzione

- Sia $P = (x,y,z) \in \pi$ e sia $P_0 = (0,2,7)$. Allora $\overrightarrow{PP_0}$ ha coordinate $(x-0,\ y-2,\ z-7)$. Ora voglio che sia ortogonale a $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ossia

$$0 = \langle \overrightarrow{P_0P}, v \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x-0 \\ y-2 \\ z-7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\Leftrightarrow \quad 1 \cdot (x-0) + 0(y-2) + 1 \cdot (z-7) = 0$

equazione del piano π : $\quad x + z - 7 = 0$

- Analogamente se π è un piano di equazione

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

sappiamo che il vettore (A, B, C) è ortogonale al piano

$\Rightarrow (1, 0, 1) = (A, B, C)$

Da cui

$$x + z + D = 0$$

Ora imponendo il passaggio per il punto $(0+2+7)$ otteniamo D, infatti

$$0 + 7 + D = 0 \Rightarrow D = -7$$

e l'eq del piano è $x + z - 7 = 0$

ESERCIZIO 4

Dati r e il punto P in $\mathbb{R}^3$, determinare:

1) $r: \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - z = 0 \end{cases}$ $\quad P = (2, -1, 3)$

- Calcolare la distanza di r da P

Scrivo r in forma parametrica

$$r: \begin{cases} x = z \\ y = \frac{1}{2}(z - x + 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{2} \\ z = t \end{cases}$$

$$r: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

$$d(P_0, r) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_0 - b & z_0 - c \\ m & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_0 - a & z_0 - c \\ l & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_0 - a & y_0 - b \\ l & m \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} -1-\frac{1}{2} & 3-0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2-0 & 3-0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2-0 & -1-\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{2}} =$$

$$= \sqrt{\begin{vmatrix} 3/2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & -3/2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}^2} =$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + (-3)^2 + \left(2+\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 9 + \frac{49}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{9+36+49}{4}} = \frac{\sqrt{94}}{2}$$

• la retta parallela ad r passante per P

$$r_{\parallel} = \begin{cases} x = \\ y = \\ z = \end{cases} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} t$$

• Il piano perpendicolare ad r e passante per P come nell'es. precedente, vettore $\perp$ al piano che è la giacitura della retta $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$(x-2)\cdot 0 + (y+1)\cdot 1 + 1(z-3) = 0$$

$$x-2+z-3=0$$

Il piano richiesto è: $x+z-5=0$

2) $r: \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right.$ $t \in \mathbb{R}$

$P = (0, 0, 1)$

• retta parallela $r_{\parallel}: \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right.$ $t \in \mathbb{R}$

• piano ortogonale

$$0\cdot(x-2) + 2(y-0) - 2(z-1) = 0$$

$$x + 2 - 2z + 2 = 0$$

Piano cercato è $x - 2z + 4 = 0$

ESERCIZIO 5

Dato il piano p e il punto P in $\mathbb{R}^3$

1) p: $x - y + 2z = 4$

$P = (-1, 2, 1)$

• Determinare ~~la~~ distanza di P da p

$$d(P_0, P) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} =$$

$$= \frac{|1\cdot(-1) + (-1)\cdot 2 + 2\cdot 1 + 4|}{\sqrt{1+1+4}} =$$

$$= \frac{|-1 - 2 + 2 + 4|}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

• piano parallelo a p passante per P

Dato p in forma cartesiana $x - y + 2z = 4$

scriviamo p in forma parametrica

$$p: \begin{cases} x = 4 + s - 2t \\ y = s \\ z = t \end{cases} \rightarrow p: \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t \right.$$

Un piano parallelo a p ha la stessa giacitura di p ~~[illegible]~~

Scriviamo il piano // p e passante per P

$$p_{//}: \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} q \right.$$

ALTERNATIVAMENTE

DATO il piano $P: x - y + 2z - 4 = 0$, sappiamo che il vettore ortogonale a P è $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ora se un piano è parallelo a P, anche lui ha come vettore ortogonale $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Quindi come nell'esercizio 3

scrivo il piano passante per un punto e ortogonale ad un vettore

$1 \cdot (x+1) - 1(y-2) + 2(z-1)$

$P_{//}: x - y + 2z + 2 = 0$

- La retta perpendicolare a P passante per P

una retta ortogonale a $P: x - y + 2z - 4 = 0$ ha come vettore direzione il vettore ortogonale al piano, cioè $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Scrivo la retta passante per P e con vettore direzione $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$r_\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} t \quad t \in \mathbb{R} \right.$$

2) $$P: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} q + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad t, q \in \mathbb{R}$$

$P = (3, -4, 1)$

- piano parallelo ~~ortogonale~~ passante per P

$$P_{//}: \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} q + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right.$$

$t, q \in \mathbb{R}$

• Il vettore ortogonale a p, è un vettore ortogonale ai vettori direzione di p

Quindi il prodotto vettoriale tra i due vettori

$$m_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 6 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= i(18+0) - j(0+3) + k(0-6) = \begin{pmatrix} 18 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ ~~trovo~~ la retta ortogonale a p ha come vettore direzione m_p

$$\Rightarrow r_\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} . t \in \mathbb{R} \right.$$

ESERCIZIO 6

Nel piano euclideo det un'eq. contenente $\forall$ retta distante 3 dalla retta r di eq.

$x + 2y - 2 = 0$

sol

Dato $P = (x, y) \in r$, supponiamo che $d(P, r) = 3$

$$\Rightarrow 3 = d(P, r) = \frac{|1 \cdot x + 2 \cdot y - 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} =$$

$$\Rightarrow |x + 2y - 2| = 3\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow x + 2y - 2 = \pm 3\sqrt{5}$$

ESERCIZIO 7

Det tutti i piani in $\mathbb{R}^3$ passanti per il punto $(0,2,1)$ che non intersecano la retta di equazioni parametriche

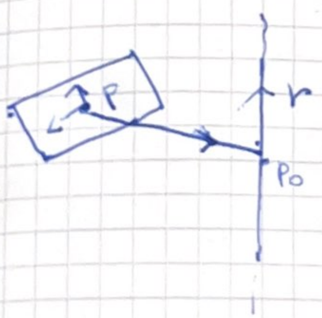
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

Sol

Se un piano non interseca una retta in $\mathbb{R}^3$ allora è // alla retta, perciò un vettore direzione del piano è il vettore direzione della retta $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow \quad p: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} q + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t,q \in \mathbb{R}$$

Ora vediamo quali condizioni sul vettore (a,b,c):



Sia $P_0 \in r$ con $P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $P \in p$ con $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Allora il vettore $\overrightarrow{P_0P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ deve essere linearmente indipendente dai vettori direzione del piano, quindi vogliamo che

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix} \neq 0$$

// 4

Ma $\det(A) = c \cdot (0 + 4) \neq 0 \iff c \neq 0$

Quindi la condizione sui vettori (a, b, c) è che $c \neq 0$

Esercizio 8

Determinare tutti i piani in $\mathbb{R}^3$ perpendicolari alla retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

e individuare tra questi quello passante per il punto $(0,0,0)$.

sol

$$r : \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow r : \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right. \quad t \in \mathbb{R}$$

Un piano perpendicolare a r, ha vettore ortogonale $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ che quindi ha equazione

$$1 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z + D = 0 \qquad D \in \mathbb{R}$$

Quello passante per $(0,0,0)$ è tale che $D = 0 \Rightarrow$ il piano cercato è

$$x + y + z = 0$$

ESERCIZIO 9 : ESAME SCRITTO ANNO 2021-2022 PROVA SCRITTA DEL 28-1-2022

ES 10 : ESAME SCRITTO ANNO 2018-2019 PROVA SCRITTA DEL 20-6-2019