Università degli Studi di Roma Tre, A.A. 2023/2024
Corso di Laurea Triennale in Fisica e Matematica
GE210 - Geometria e Algebra Lineare 2

Docente: Angelo Felice Lopez

Esercitatore: Luca Schaffler

Tutori: Ilaria Cruciani, Michele Matteucci

Tutorato 3

Esercizio 1. Determinare le equazioni cartesiane della retta in $\mathbb{R}^3$ passante per il punto $\big(0,1,0\big)$ la cui direzione è il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 2. Determinare l'equazione cartesiana del piano in $\mathbb{R}^3$ passante per il punto $\big(0,1,1\big)$ le cui direzioni sono i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3. Determinare l'equazione cartesiana del piano in $\mathbb{R}^3$ passante per il punto $\big(0,2,7\big)$ la cui direzione normale è il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 4. Data la retta r e il punto P in $\mathbb{R}^3$, determinare la distanza di r da P, la retta parallela a r passante per P e il piano perpendicolare a r passante per P.

(i) $r : \begin{cases} x+2y-z=1 \\ x-z=0 \end{cases}$

$P = \big(2,-1,3\big)$

(ii) $r : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$

$P = \big(0,0,1\big)$

Esercizio 5. Dato il piano p e il punto P in $\mathbb{R}^3$, determinare la distanza di p da P, il piano parallelo a p passante per P e la retta perpendicolare a p passante per P.

(i) $p: \quad x - +y + 2z = 4$
$P = \big(-1, 2, 1\big)$

(ii) $p: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} q + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad t, q \in \mathbb{R}$
$P = \big(3, -4, 1\big)$

Esercizio 6. Nel piano euclideo, determinare un'equazione cartesiana per ogni retta s distante 3 dalla retta r di equazione $X + 2Y - 2 = 0$.

Esercizio 7. Determinare tutti i piani in $\mathbb{R}^3$ passanti per il punto $\big(0, 2, 1\big)$ che non intersecano la retta di equazione parametrica $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 8. Determinare tutti i piani in $\mathbb{R}^3$ perpendicolari alla retta di equazioni cartesiane $\begin{cases} x + -y - 1 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$, e individuare tra questi quello passante per il punto $\big(0, 0, 0\big)$.

Esercizio 9. Sia k un numero reale. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ una sua base.

(i) Mostrare che esiste un'unica forma bilineare simmetrica $b : V \times V \to \mathbb{R}$ tale che

$$b(e_3, e_3) = k{+}1,\ b(e_1, e_1) = k,\ b(e_1, e_3) = -1,\ b(e_2, e_2) = 1,\ b(e_2, e_1) = -1$$

e che il coefficiente di Fourier di $e_2 + e_3$ rispetto a e_2 'e 1;

(ii) Calcolare la matrice di b nella forma canonica di Sylvester e determinare i valori di k per i quali b definisce un prodotto scalare su V.

Esercizio 10. Sia E uno spazio euclideo di dimensione 3 e sia $\{O, i, j, k\}$ un suo sistema di coordinate cartesiane. Siano $P_0 = P_0(1, 0, 0) \in E$, r ed r' le rette di E di equazioni

$$r : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -t \end{cases} \qquad r' : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

(i) Determinare tutte le rette s che soddisfano tutte e tre le seguenti condizioni: s ha distanza $\frac{2}{\sqrt{3}}$ da r, s passa per il punto $P = P(0, 1, 0)$ ed s forma un angolo di $\frac{\pi}{2}$ con r'.

(ii) Determinare tutte le rette s' che soddisfano tutte e tre le seguenti condizioni: s' è perpendicolare ad r, $d(P_0, s') = 2$, s' interseca r nel punto $P' = P'(2, -1, 0)$.