TUTORATO 4

ESERCIZIO 1

Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ definito rispetto ad una base $E = \{e_1, e_2\}$ di $\mathbb{R}^2$ dalla matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Verificare se esiste un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ rispetto a cui

1) T è autoaggiunto
2) T è unitario

Soluzione

Sia $v \in \mathbb{R}^2$ allora $v = x e_1 + y e_2$ con $x, y \in \mathbb{R}^2$

Allora $T(v) = x\, T(e_1) + y\, T(e_2) = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Perciò se $v = x e_1 + y e_2$ allora $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

allora $T(v) = \alpha e_1 + \beta e_2$

Denotiamo con $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice che genera il prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ nella base E allora C deve essere simmetrica, da cui $b = c \Rightarrow C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$

e definita positiva (ovvero tutti i minori devono essere positivi) da cui $a>0$ e $\begin{vmatrix} a & b \\ b & d \end{vmatrix} = ad - b^2 > 0 \Rightarrow ad > b^2$

1) Ora T è autoaggiunto $\Leftrightarrow$

$$\langle T(v), w \rangle = \langle v, T(w) \rangle \quad \forall\, v, w \in \mathbb{R}^2$$

Ora se $v, w \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$, con $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$w = y_1 e_1 + x_2 e + x_3 e_3$, con $\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \langle T(v), w \rangle = \langle v, T(w) \rangle$

$\Leftrightarrow T(v)^t\, C\, w = v^t\, C\, T(w) \quad \forall\, v, w \in \mathbb{R}^2$

$\Leftrightarrow (M\bar{x})^t\, C\, \bar{y} = \bar{x}^t\, C\, (M\bar{y}) \quad \forall\, \bar{x}, \bar{y}$

$\Leftrightarrow \bar{x}^t M^t C\, \bar{y} = \bar{x}^t C M \bar{y} \quad \forall\, \bar{x}, \bar{y}$

$\Leftrightarrow M^t C = C M$

Ora

$$M^t C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & b-d \\ 2b & 2d \end{pmatrix}$$

$$CM = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & 2b \\ b-d & 2d \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b = a-b \ \checkmark \\ b-d = 2b \\ 2b = b-d \\ 2d = 2d \ \checkmark \end{cases} \Leftrightarrow 2b = b-d \Leftrightarrow b = -d$$

2)

Ricordiamo le condizioni imposte per far sì che il fatto che dovevano essere definiti positivi

$$\begin{cases} b = -d \\ +ad - b^2 > 0 \\ a > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a > 0 \\ -ab - b^2 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a > 0 \\ ab + b^2 > 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b < 0 \\ a > -b \end{cases}$$

Quindi la matrice $C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ che definisce il prodotto scalare deve essere tale che $\begin{cases} b < 0 \\ a > -b \end{cases}$

2) T è unitario $\iff \langle T(v), T(w) \rangle = \langle v, w \rangle \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^2$

Ora $\langle T(v), T(w) \rangle = \langle v, w \rangle \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^2$

$\iff T(v)^t \, C \, T(w) = v^t \, C \, w \quad \forall \cancel{v}, w \in \mathbb{R}^2$

$\iff \bar{x} \, M^t C M \, \bar{y} = \cancel{\bar{x}}^t \, C \, \bar{y} \quad \forall \bar{x}, \bar{y}$

$\iff M^t C M = C$

Ora $M^t C M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} a - 2b + d & 2b - 2d \\ 2b - 2d & 4d \end{pmatrix} = C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

$\iff$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-2b+d=a \\ 2b-2d=b \\ 2b-2d=b \\ 4d=d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2b+d=0 \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ d=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ non def un prodotto scalare perché non è def positiva

$\Rightarrow \nexists$ un prodotto scalare che rende T unit.

ESERCIZIO 2

Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia V uno spazio vettoriale euclideo e sia $e=\{e_1, e_2, e_3\}$ una sua base tale che $e'=\{e_1, e_2, e_1+e_3\}$ è una base ortonormale. Sia $T: V \to V$ un operatore lineare tale

$T(e_1) = e_1 + k e_3$, $T(e_2) = e_1 + k e_2 + e_3$

$T(e_3) = e_1 + e_2$

1) Determinare i valori di k per cui T è autoaggiunto

2) Determinare i valori di k per cui T è unitario

Soluzione

Calcoliamo prima di tutto $M_{e'}(T)$ dove $e'=\{e_1, e_2, e_1+e_3\}$ è una base ortogonale

Sappiamo che $M_{e'}(T) = ([T(e_1)]_{e'} \; [T(e_2)]_{e'} \; [T(e_1+e_3)]_{e'})$

dove con $[T(v)]_{e'}$ indichiamo le coordinate di $T(v)$ nella base e'

- $T(e_1) = e_1 + k e_3 = e_1 + k e_1 - k e_1 + k e_3 =$

$$= (1-k) e_1 + k(e_1 + e_3)$$

$$\Rightarrow [T(e_1)]_{e'} = \begin{pmatrix} 1-k \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$$

- $T(e_2) = e_1 + k e_2 + e_3 = e_1 + e_1 - e_1 + k e_2 + e_3$

$$= k e_2 + (e_1 + e_3)$$

$$\Rightarrow [T(e_2)]_{e'} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $T(e_1 + e_3) = T(e_1) + T(e_3) = e_1 + k e_3 + e_1 + e_2$

$$= e_1 + k e_1 - k e_1 + e_1 + e_2 + k e_3$$

$$= (2+k) e_1 + e_2 + k(e_1 + e_3)$$

$$\Rightarrow [T(e_2 + e_3)]_{e'} = \begin{pmatrix} 2+k \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_{e'}(T) = \begin{pmatrix} 1-k & 0 & 2+k \\ 0 & k & 1 \\ k & 1 & k \end{pmatrix}$$

1) Ora T è autoaggiunto $\Leftrightarrow$ $T^* = T$ $\Leftrightarrow$ T è simmetrico $\Leftrightarrow$ $M_{e'}(T)$ è simmetrica con e' una base ortogonale

Ora $M_e(T)$ è simmetrica $\Leftrightarrow$ $2+k = k$ assurdo
$\Rightarrow \nexists$ valori di k per cui T è simmetrico.

2) T è unitario $\iff$ $M_{B'}(T)$ è ortogonale con B' una base ORTONORMALE

Sia $A = M_B(T)$ è ortogonale se $AA^t = A^tA = I_3$

(ovvero $A^t = A^{-1}$)

Calcoliamo

$$AA^t = \begin{pmatrix} 1-k & 0 & 2+k \\ 0 & k & 1 \\ k & 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & k & 1 \\ 2+k & 1 & k \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} k^2+3k+5 & 2+k & 3k \\ 2+k & k^2+1 & 2k \\ k^2+3k & 2k & 2k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dovrei per esempio avere

$2+k=0$

$2k=0$ $\Rightarrow$ $k=-2$ e $k=0$ contemporaneamente assurdo

$\Rightarrow \nexists$ valori di k per cui T è unitario.

Esercizio 3

In E^3 consideriamo il piano P di equazione

$2x+3y+z-1=0$ e sia r_k la retta

di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = -2k + (k-1)t \\ y = -1 + k + t \\ z = k + 2kt \end{cases}$$

Trovare se esistono valori di k

tali che l'angolo tra P e r_k è $\frac{\pi}{3}$

Soluzione

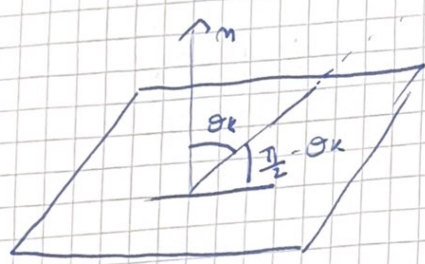
$p: \ 2x+3y+z-1=0$

$r_k \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k-1 \\ 1 \\ 2k \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -2k \\ k-1 \\ k \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$

ANGOLO TRA $(p, r_k) = \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - \theta_k$

(dove θ_k è l'angolo tra n_p e v_k)

$\ldots \Rightarrow \theta_k = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$



$$\cos(\theta_k) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} k-1 \\ 1 \\ 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} k-1 \\ 1 \\ 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k-1 \\ 1 \\ 2k \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}}$$

$$= \frac{2k-2+3+2k}{\sqrt{(k^2-2k+1+1+4k^2)14}} = \frac{4k+1}{\sqrt{(5k^2-2k+2)14}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4k+1}{\sqrt{(5k^2-2k+2)14}}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{16k^2+8k+1}{7(5k^2-2k+2)}$$

$$\Rightarrow 21(5k^2-2k+2) = 32k^2+16k+2$$

$\Rightarrow 105k^2 - 42k + 42 - 32k^2 - 16k - 2 = 0$

$\Rightarrow 73k^2 - 58k + 40 = 0$

$\Delta = 58^2 - 4 \cdot 40 \cdot 73 < 0$

$\Rightarrow \nexists\, k \in \mathbb{R}$ tale che angolo tra $(p, r_k) = \frac{\pi}{3}$

Esercizio 4

Dati in E^3 il piano di equazione cartesiana $p: 2x + 4y - z - 1 = 0$ e il punto $P = (0,0,0)$

determinare

1) le equazioni di tutti i piani passanti per P che formano con il piano p un angolo di $\pi/4$

2) le equazioni di tutte le rette passanti per P che formano con il piano p un angolo di $\pi/6$

Sol.

1) Vogliamo determinare π tale che $P \in \pi$ e angolo tra n_p e n_π è $\frac{\pi}{4}$

Sia n_π il vettore ortogonale al piano π, allora $n_\pi = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ e possiamo chiedere

$\|n_p\| = 1$ ovvero che $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

↳ vettore lungo 1

Inoltre $P \in \pi$ $\Rightarrow$

$$a(x-0)+b(y-0)+c(z-0)=0$$

$\Rightarrow$ $ax+by+cz=0$

↓ piano cercato, dobbiamo imporre delle condizioni su a,b,c

• PRIMA CONDIZIONE:

Possiamo assumere che il vettore è tale a $\|n_\pi\|=1$

— $a^2+b^2+c^2=1$

• Seconda condizione:
Deriva dal fatto che angolo tra ρ e π è $\pi/4=\theta$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\theta=\frac{\langle n_\rho, n_\pi\rangle}{\|n_\rho\|\ \underbrace{\|n_\pi\|}_{1}}=\frac{\left\langle \begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right\rangle}{\sqrt{\left\langle\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}\right\rangle}}=$$

$$=\frac{2a+4b-c}{\sqrt{21}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2a+4b-c}{\sqrt{21}}$$

$$\Rightarrow 2a+4b-c=\frac{\sqrt{42}}{2}$$

$\Rightarrow$ Le condizioni sono

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=1 \\ c=2a+4b-\frac{\sqrt{42}}{2} \end{cases}$$

2) Sia r la retta cercata $\Rightarrow$

$$r: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$

- Ora voglio $P \in r \Rightarrow r: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} t \quad t \in \mathbb{R}$

- Non voglio perdere ... che $v_r = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$ è lungo 1 ovvero che $\|v_r\| = 1$, cioè che

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

- Ora voglio che angolo$(P, r) = \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \theta$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\left\langle \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\sqrt{21}} = \frac{2l + 4m - n}{\sqrt{21}} =$$

$$= \cos\theta = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ le condizioni su l, m, n sono

$$\begin{cases} 2l + 4m - n = \frac{\sqrt{21}}{2} \\ l^2 + m^2 + n^2 = 1 \end{cases}$$

Esercizio 5

Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la retta di equazioni

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = kt \\ z = -t + 2 \end{cases}$$

formi un angolo di $\frac{\pi}{6}$ con il piano $x = 0$

Soluz

$$r: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ k \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$p: x = 0 \Rightarrow v_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Angolo}(r, p) = \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \theta_k \Rightarrow \theta_k = \frac{\pi}{3}$$

$$\cos \theta_k = \frac{1}{2} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ k \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ k \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ k \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}} = \frac{2}{\sqrt{5+k^2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{5+k^2} = 4 \Rightarrow 5 + k^2 = 16 \Rightarrow k^2 = 11 \Rightarrow k = \pm\sqrt{11}$$

ESERCIZIO 6

Sia $k \in \mathbb{R}$ con $k > 0$ e $k \neq 1/4$.

Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ una sua base

1) Mostrare che esiste un'unica forma bilineare simmetrica $b: V \times V \to V$

tale che

$b(e_1, e_1) = b(e_3, e_3) = \frac{1}{2}$, $b(e_2, e_2) = b(e_1, e_3) = k$

e $e_2 \perp e_1, e_3$

sol

la condizione $e_2 \perp e_1$ e $e_2 \perp e_3 \Rightarrow b(e_1, e_2) = 0$

$b(e_2, e_3) = 0$

Questo ci definisce univocamente una forma bilineare simmetrica b tale che

$$M_{\mathcal{E}}(b) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & k \\ 0 & k & 0 \\ k & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

2) Calcolare la matrice b nella forma canonica di Sylvester e determinare i valori di k per i quali b definisca un prodotto scalare su V.

Calcolare

- PRIMO PASSO: Troviamo una base e' che sia ortogonale per la forma bilineare b avere tale che $M_{e'}(b)$ è diagonale

Sappiamo che e_2 è non isotropo, infatti $b(e_2, e_2) = 0$ ed inoltre $e_3 \in e_2^\perp$ ed è un vettore non isotropo

infatti $b(e_3, e_3) = 0$

Quindi la nuova base sarà $\{e_1, e_3, v\}$

con $v \in e_2^\perp \cap e_3^\perp$

Calcoliamo $v \in e_2^\perp \cap e_3^\perp$

- $e_2^\perp$:

$e_2^\perp$ è dato da tutti i vettori tali che

$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$

$b(e_2, v) = 0 \Leftrightarrow$

$$0 = b(e_2, v) = b(e_2, x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) =$$
$$= x_1 b(e_2, e_1) + x_2 b(e_2, e_2) + x_3 b(e_2, e_3)$$
$$= x_1 \cdot 0 + k x_2 + x_3 \cdot 0$$

$\Rightarrow k x_2 = 0$

- Ora $k \neq 0$ abbiamo che $e_2^\perp = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$

ovvero $e_2^\perp$ è dato da $x_2 = 0$

- $e_3^\perp$ $v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$

Ora $b(e_3, v) = 0 \iff$

$0 = b(e_3, x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) =$
$= x_1 b(e_3, e_1) + x_2 b(e_3, e_2) + x_3 b(e_3, e_3)$
$= x_1 k + \frac{1}{2} x_3 \Rightarrow x_1 k + \frac{1}{2} x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 2k x_1$

$\Rightarrow e_3^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

Ora $k \neq 0$ $e_2^\perp \cap e_3^\perp$: $\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 2k x_1 \end{cases}$

$\Rightarrow e_2^\perp \cap e_3^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2k \end{pmatrix} \right\rangle$

$\Rightarrow v \in e_2^\perp \cap e_3^\perp$ è $v = e_1 + 2k e_3$

ed è tale che $b(v,v) = b(e_1 + 2k e_3, e_1 + 2k e_3) =$
$= b(e_1, e_1) + 4k\, b(e_1, e_3) + 4k^2 b(e_3, e_3)$
$= \frac{1}{2} + 4k^2 + 2k^2 = 6k^2 + \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Data $e' = \{e_1, e_3, v\} \to$ è una base ortogonale

è tale che $M_{e'}(b) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 6k^2 + 1/2 \end{pmatrix}$

- Il secondo passo è ortonormalizzare la base e'

Notiamo che $6k^2 + 1/2 > 0$ $\forall k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Pongo $v_1 = \frac{e_1}{\sqrt{b(e_1, e_1)}} = \frac{1}{\sqrt{1/2}} e_1$

$v_2 = \frac{e_3}{\sqrt{b(e_3, e_3)}} = \frac{1}{\sqrt{1/2}} e_3$

$v_3 = v / \sqrt{b(v,v)} = 1 / \sqrt{6k^2 + 1/2} \; (e_1 + 2k e_3)$

$\Rightarrow$ Data $\mathcal{B}'' = \{ v_1, v_2, v_3 \}$

è tale che $M_{\mathcal{B}''}(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ Forma canonica di Sylvester

Def positiva

$\Rightarrow$ Definisce un prodotto scalare $\forall\, k$ dato dall'esercizio