Università degli Studi di Roma Tre, A.A. 2023/2024
Corso di Laurea Triennale in Fisica e Matematica
GE210 - Geometria e Algebra Lineare 2

Docente: Angelo Felice Lopez
Esercitatore: Luca Schaffler
Tutori: Ilaria Cruciani, Michele Matteucci

Tutorato 4

Esercizio 1. Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ definito rispetto ad una base $E = \{e_1, e_2\}$ di $\mathbb{R}^2$ dalla matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Verificare se esiste un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ rispetto a cui:

(i) T è autoaggiunto;

(ii) T è unitario.

Esercizio 2. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia V uno spazio vettoriale euclideo e sia $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ una sua base tale che $e' = \{e_1, e_2, e_1+e_3\}$ è una base ortonormale. Sia $T : V \to V$ un operatore lineare tale che

$$T(e_1) = e_1 + ke_3 \quad T(e_2) = e_1 + ke_2 + e_3 \quad T(e_3) = e_1 + e_2$$

(i) Determinare i valori di k per cui T è autoaggiunto;

(ii) Determinare i valori di k per cui T è unitario.

Esercizio 3. In $\mathbf{E}^3$ consideriamo il piano p di equazione $2X + 3Y + Z - 1 = 0$ e sia r_k la retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} X = -2k + (k-1)t \\ Y = -1 + k + t \\ Z = k + 2kt. \end{cases}$$

Trovare, se esistono, i valori di k tali che l'angolo tra p e r_k è $\pi/3$.

Esercizio 4. Dati in $\mathbf{E}^3$ il piano di equazione cartesiana $p : 2x + 4y - z - 1 = 0$ e il punto $P = P(0, 0, 0)$, determinare:

(i) Le equazioni di tutti i piani passanti per P che formino con il piano p un angolo di $\dfrac{\pi}{4}$;

(ii) L'equazione di tutte le rette passanti per P che formino con il piano p un angolo di $\dfrac{\pi}{6}$.

Esercizio 5. Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la retta di equazione

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = kt \\ z = -t + 2 \end{cases}$$

formi un angolo di $\frac{\pi}{6}$ con il piano $x = 0$.

Esercizio 6. Sia $k \in \mathbb{R}$, con $k > 0$ e $k \neq \frac{1}{4}$. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ una sua base

(i) Mostrare che esiste un'unica forma bilineare simmetrica $b : V \times V \to V$ tale che

$$b(e_1, e_1) = b(e_3, e_3) = \frac{1}{2}, \quad b(e_2, e_2) = b(e_1, e_3) = k, \quad e_2 \perp e_1, e_3$$

(iii) Calcolare la matrice di b nella forma canonica di Sylvester e determinare i valori di k per i quali b definisce un prodotto scalare su V.