# TUTORATO 5

## ESERCIZIO 1

Nel piano affine NUMERICO $\mathbb{A}_2(\mathbb{R})$ si fissi il riferimento standard $R(O, \mathcal{B}_e)$.

Si considerino le terne di punti

$P_0(1,2)$, $P_1(-1,0)$, $P_2(0,0)$

$Q_0(2,1)$ $Q_1(2,-3)$ $Q_2(3,-1)$

1) Determinare le equazioni dell'affinità

$f: \mathbb{A}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{A}_2(\mathbb{R})$ tale che $f(P_i) = Q_i$

per ogni $i = 0, 1, 2$

Soluzione

2 METODI:

METODO 1:

Sappiamo che ogni affinità $f: \mathbb{A}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{A}_2(\mathbb{R})$ è della forma $X' = AX + b$

dove $A \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ è una matrice invertibile e $b \in \mathbb{R}^2$.

Quindi abbiamo $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

Vogliamo dunque determinare $A$ e $b$.

- Sappiamo che $f(P_2) = Q_2 \Rightarrow f((0,0)) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Determiniamo la matrice $A$

Sappiamo che $f(P_1) = Q_1$ e $f(P_2) = Q_2$

- $f((-1,0)) = (2,-3) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 = -a_{11} + 3 \\ -3 = -a_{21} - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = 1 \\ a_{21} = 2 \end{cases}$$

- $f((1,2)) = (2,1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ 2 & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 = 1 + 2a_{12} + 3 \\ 1 = 2 + 2a_{22} - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{12} = -1 \\ a_{22} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ L'affinità cercata è

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

METODO 2:

Vogliamo cercare l'affinità $f: \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ con $x' = Ax + b$ dove $A$ è invertibile tale che $f(P_i) = Q_i \quad \forall i = 0,1,2$.

Vogliamo prima di tutto trovare $A$:

$A$ è la matrice che definisce l'automorfismo tra spazi vettoriali

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$x \longrightarrow Ax$$

tale che $\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \varphi(\overrightarrow{PQ}) \quad \forall P, Q \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$

Per determinare $\varphi$ devo determinare l'immagine dei vettori della base canonica $e_1, e_2$

(Dato che stiamo considerando lo spazio affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ con riferimento affine $\{O, e_1, e_2\}$.
(quindi stiamo scegliendo come base di $\mathbb{R}^2$ la base canonica)

Quindi per calcolare A, calcoliamo $\varphi(e_1)$ e $\varphi(e_2)$:
Ricordiamo che vogliamo un'affinità tale che
$f(P_i) = Q_i \quad \forall\ i = 0, 1, 2) \Rightarrow$ $f(P_0) = Q_0$
$f(P_1) = Q_1$
$f(P_2) = Q_2$

Ora se $\varphi$ è l'automorfismo associato ad f abbiamo:

- $\overrightarrow{Q_0Q_1} \underset{\text{ipotesi}}{=} \overrightarrow{f(P_0)f(P_1)} \underset{\text{def di affinità}}{=} \varphi(\overrightarrow{P_0P_1})$
- $\overrightarrow{Q_0Q_2} = \overrightarrow{f(P_0)f(P_2)} = \varphi(\overrightarrow{P_0P_2})$

Quindi sappiamo calcolare l'immagine dei vettori $\overrightarrow{P_0P_1}$ e $\overrightarrow{P_0P_2}$.

Se ora $\overrightarrow{P_0P_1}$ e $\overrightarrow{P_0P_2}$ sono vettori linearmente indipendenti, possiamo scrivere $e_1, e_2$ come combinazione lineare dei vettori $\overrightarrow{P_0P_1}$ e $\overrightarrow{P_0P_2}$
ovvero

$e_1 = \alpha\, \overrightarrow{P_0P_1} + \beta\, \overrightarrow{P_0P_2}$ $\qquad \alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathbb{R}$
$e_2 = \alpha'\, \overrightarrow{P_0P_1} + \beta'\, \overrightarrow{P_0P_2}$

Allora sapremo anche calcolare $\varphi(e_1)$ e $\varphi(e_2)$:
- $\varphi(e_1) = \varphi(\alpha\, \overrightarrow{P_0P_1} + \beta\, \overrightarrow{P_0P_2}) \underset{\varphi\text{ lin}}{=} \alpha\, \varphi(\overrightarrow{P_0P_1}) + \beta\, \varphi(\overrightarrow{P_0P_2})$

che conosciamo

- analogamente $\varphi(e_2)$

RITORNIAMO ALL'ESERCIZIO:

Scriviamo $e_1$, $e_2$ come combinazione lineare di $\overrightarrow{P_0P_1}$ e $\overrightarrow{P_0P_2}$

- $\overrightarrow{P_0P_1} = (-2,-2) := u_1$
- $\overrightarrow{P_0P_2} = (-1,-2) := u_2$

• Scrivo $e_1$ come combinazione lineare di $u_1$ e $u_2$

$$(1,0) = e_1 = \lambda u_1 + \mu e_2 = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\lambda - \mu \\ -2\lambda - 2\mu \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -2\lambda - \mu = 1 \\ -2\lambda - 2\mu = 0 \end{cases} \iff \begin{matrix} \lambda = -1 \\ \mu = 2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow e_1 = -u_1 + u_2 = -\overrightarrow{P_0P_1} + \overrightarrow{P_0P_2}$$

• Analogamente svolgendo i calcoli si ottiene:

$$e_2 = \frac{1}{2} u_1 - u_2 = \frac{1}{2} \overrightarrow{P_0P_1} - \overrightarrow{P_0P_2}$$

Quindi abbiamo scritto $e_1$ ed $e_2$ come combinazione lineare di $\overrightarrow{P_0P_1}$ e $\overrightarrow{P_0P_2}$

Siamo pronti per calcolare $\varphi(e_1)$ e $\varphi(e_2)$

• $\varphi(e_1) = \varphi(-\overrightarrow{P_0P_1} + \overrightarrow{P_0P_2}) = -\varphi(\overrightarrow{P_0P_1}) + \varphi(\overrightarrow{P_0P_2}) =$
$= -\overrightarrow{Q_0Q_1} + \overrightarrow{Q_0Q_2} = -(0,-4) + (1,-2) = (1,2)$

• $\varphi(e_2) = \varphi\left(\frac{1}{2} \overrightarrow{P_0P_1} - \overrightarrow{P_0P_2}\right) = \frac{1}{2} \varphi(\overrightarrow{P_0P_1}) - \varphi(\overrightarrow{P_0P_2}) =$
$= \frac{1}{2} \overrightarrow{Q_0Q_1} - \overrightarrow{Q_0Q_2} = (-1,0)$

$\Rightarrow \varphi(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\varphi(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ora $A = (\varphi(e_1) \mid \varphi(e_2)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$\downarrow$ scritto per colonne
le immagini dei vettori della base canonica.

$\Rightarrow$ L'affinità f cercata è tale che

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b$$

Per trovare b, basta imporre il passaggio per un qualsiasi punto, ovvero $f(P_i) = Q_i$ e trovo il vettore b.

In questo caso come nel altro metodo è conveniente imporre $f(P_i) = Q_i$ e si trova $b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2) Determinare se esistono i punti uniti di f (ovvero i punti fissi di f)

Per determinare i punti fissi di $\varphi: X' = AX + b$ basta imporre $X' = X$ e quindi risolvere il sistema

$$\varphi: \begin{cases} x = x - y + 3 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3 \\ x = \frac{y+1}{2} = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \varphi$ ammette un unico punto fisso $(2, 3)$

3) Considerato la retta $r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - t \end{cases}$

determinare le equazioni parametriche e cartesiane della retta $\varphi(r)$

Soluzione

avendo a disposizione le equazioni parametriche di $r$ sostituiamo nelle equazioni di $\varphi$ e otteniamo le equazioni parametriche per $\varphi(r)$

$$\varphi(r) = \begin{cases} x = (1+t) - (3-t) + 3 \\ y = 2(1+t) - 1 \end{cases} \iff \varphi(r): \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = 2t+1 \end{cases}$$

Da cui otteniamo le seguenti equazioni cartesiane per $\varphi(r)$ è:

$$x - y = 0$$

Esercizio 2

Si consideri $f: E^3 \to E^3$ data da

$$f(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y, z+1\right)$$

1) $f$ è un'isometria?

Soluzione

- Mi chiedo prima di tutto se $f$ è un'affinità. Scrivo $f$ nel seguente modo

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1/2 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Affinché $f(X) = AX + b$ sia un'affinità voglio che $A$ sia una matrice invertibile.

Calcolo $\det(A) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 \neq 0$

$\Rightarrow A$ è invertibile $\Rightarrow f$ è un'affinità.

- Ora $f$ è un'isometria $\Leftrightarrow$ l'automorfismo (associato a $f$) $\varphi$ è un operatore unitario $\Leftrightarrow AA^t = I_n$

Ora

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow f$ è un'isometria

2) Interpretando $f$ come cambio di coordinate, calcolare l'immagine della retta

$$r: \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$ tramite $f$.

2) Interpretando $f$ come cambio di coordinate cartesiane calcolare l'immagine della retta
$$r: \begin{cases} x+z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$
tramite $f$

METODO 1:

Vediamo $f$ nel seguente modo

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esplicito $(x, y, z)$ nel seguente modo

$$\begin{pmatrix} x'-1 \\ y' \\ z'-1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underset{\substack{\parallel \\ A^t}}{A^{-1}} \begin{pmatrix} x'-1 \\ y' \\ z'-1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'-1 \\ y' \\ z'-1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2(x'-1) + \sqrt{3}/2\, y' \\ -\sqrt{3}/2\,(x'-1) + 1/2\, y' \\ z'-1 \end{pmatrix}$$

Sostituisco nella retta $r$: $\begin{cases} x+z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 1/2\,(x'-1) + \sqrt{3}/2\, y' + z'-1 = 0 \\ -\sqrt{3}/2\,(x'-1) + 1/2\, y' + z'-1 = 0 \end{cases}$$

• METODO 2

$$\otimes \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \left( \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1,\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y,\ z + 2 \right)$$

Scrivo $r$ in forma parametrica

$r: \begin{cases} x = -t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$ e sostituisco in $\otimes$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{1}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{2}t + 1 \\ -\sqrt{3}/2\, t - \frac{1}{2}t \\ t + 1 \end{cases}$$ eq par di $r'$

Esercizio 5

Sia $f$ un'affinità su $A$. Verificare che se $f$ fissa due punti $P$ e $Q$ allora fissa tutti i punti della retta per $P$ e $Q$.

Soluzione

• Sia $r$ la retta tra $P$ e $Q$.

Se $f(P) = P$ e $f(Q) = Q \Rightarrow f(R) = R \ \forall R \in r$

• Se $R \in r$ (ovvero è un generico punto di $r$) allora possiamo scrivere $R$ nel seguente modo

$$R = P + t\,\overrightarrow{PQ} \qquad t \in \mathbb{R}$$

ovvero $\overrightarrow{PR} = t\,\overrightarrow{PQ}$ (ovvero i due vettori sono proporzionali)

Vogliamo mostrare che $f(R) = R$

Ricordo che se $f : A \to A$ è un'affinità $\exists\ \varphi : V \to V$ automorfismo tale che $\forall\, P, Q \in A$

$$\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \varphi(\overrightarrow{PQ})$$

Ritorniamo all'esercizio 2 e calcola $\overrightarrow{Pf(R)}$

$$\overrightarrow{Pf(R)} = \overrightarrow{f(P)f(R)} = \varphi(\overrightarrow{PR}) = \varphi(t\overrightarrow{PQ}) =$$
$$= t\,\varphi(\overrightarrow{PQ}) = t\,\overrightarrow{f(P)f(Q)} = t\,\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{Pf(R)} = \overrightarrow{PR} \Rightarrow f(R)$$

poiché per definizione $\forall\ \underset{P}{\overset{}{P}} \in A$ e $\forall\ v \in V$ ($v = \overrightarrow{PR}$)

$\exists!\ Q\ (= R = f(R))$ tale che $\overrightarrow{PQ} = v$

[illegible]

ESERCIZIO 3/4

(i)

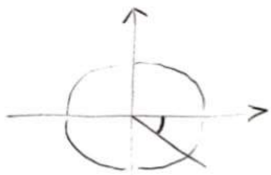
$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2} x + \frac{\sqrt{2}}{2} y + 1 - \sqrt{2} \\ y' = -\frac{\sqrt{2}}{2} x + \frac{\sqrt{2}}{2} y + 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

LA MATRICE $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ HA DETERMINANTE UGUALE A 1, QUINDI È UNA MATRICE DI ROTAZIONE

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \sqrt{2}/2 \\ \sin\theta = -\sqrt{2}/2 \end{cases} \longrightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$$



QUINDI LA TRASFORMAZIONE PUO' ESSERE INTERPRETATA COME UNA ROTAZIONE DI CENTRO L'ORIGINE DI UN ANGOLO $\theta = -\frac{\pi}{4}$ SEGUITA DA UNA TRASLAZIONE DI VETTORE $\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

ALTERNATIVAMENTE POSSIAMO INTERPRETARE LA TRASFORMAZIONE COME UNA ROTAZIONE DI ANGOLO

$\Theta = -\frac{\pi}{4}$ E CENTRO C DA DETERMINARE, PER FARLO RISOLVIAMO IL SISTEMA

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1 - \sqrt{2} = x \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1 = y \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)x + \frac{\sqrt{2}}{2}y = \sqrt{2} - 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

QUINDI $C = (1, 1)$

(ii)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

LA MATRICE $A = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ HA

DETERMINANTE $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

E PERTANTO LA TRASFORMAZIONE NON È UN'ISOMETRIA

---

(iii)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

LA MATRICE $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ HA

DETERMINANTE UGUALE A $0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$,

PERCIÒ È UN'ISOMETRIA INVERSA

---

(iv)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

LA MATRICE $A = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ HA

DETERMINANTE UGUALE A

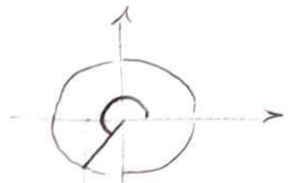
$\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ E

PERCIÒ È UNA MATRICE DI

ROTAZIONE

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos\theta = -1/2 \\ \sin\theta = -\sqrt{3}/2 \end{cases} \longrightarrow \theta = \frac{4}{3}\pi$$



QUINDI LA TRASFORMAZIONE PUÒ ESSERE INTERPRETATA COME UNA ROTAZIONE DI UN ANGOLO $\theta = \frac{4}{3}\pi$ CON CENTRO L'ORIGINE SEGUITA DA UNA TRASLAZIONE DI VETTORE $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

ALTERNATIVAMENTE POSSIAMO INTERPRETARE LA TRASFORMAZIONE COME UNA ROTAZIONE DI ANGOLO $\theta = \frac{4}{3}\pi$ CON CENTRO $C$ DA DETERMINARE, PER FARLO RISOLVIAMO IL SISTEMA

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{2}y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 3/2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad C = \left( \frac{1}{2}, \ -\frac{1}{2\sqrt{3}} \right)$$

---

(V)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

LA MATRICE $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ HA DETERMINANTE UGUALE A

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1 ,$$

QUINDI LA TRASFORMAZIONE È UN'ISOMETRIA INVERSA

---

Esercizio 6

Sia $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ un piano affine con riferimento $O\, e_1, e_2$

1) Determinare l'equazione di ogni affinità $f$ che fissa i punti della retta $r$ di equazione
$x+y=1$

Sol

L'equazione generale di un'affinità in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ è della forma

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

con $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ invertibile, ovvero $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$

- Nell'esercizio precedente abbiamo visto che le affinità che fissano due punti di una retta fissano tutti i punti di r.

Nel nostro caso r ha equazione $x+y=1$

Prendo due punti qualsiasi in r.

Per esempio $P_1=(1,0)$ e $P_2=(0,1)$

Quindi le affinità cercate sono quelle che fissano $P_1$ e $P_2$

Impongo $f(P_1)=P_1$ e $f(P_2)=P_2$

- $f(P_1)=P_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+e=1 \\ c+f=0 \end{cases}$

- $f(P_2)=P_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b+e=0 \\ d+f=1 \end{cases}$

ed ottengo il sistema

$$\begin{cases} a+e=1 \\ c+f=0 \\ b+e=0 \\ d+f=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e=1-a \\ c=-f \\ b=-e \\ f=1-d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e=1-a \\ c=d-1 \\ b=a-1 \\ f=1-d \end{cases}$$

$\Rightarrow$ le affinità cercate hanno la

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & a-1 \\ d-1 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1-a \\ 1-d \end{pmatrix}$$

con $\det\begin{pmatrix} a & a-1 \\ d-1 & d \end{pmatrix}\neq 0 \Rightarrow ad-(a-1)(d-1)=a+d-1\neq 0$

$\Rightarrow a+d\neq 1$

2) Considerare i punti $P=(1,2)$ e $Q(2,1) \in A$, tra le affinità considerate in (1) determinare quelle che trasformano $P$ in $Q$.

Sol

notiamo $P, Q \notin r$, quindi ha senso chiedersi $f(P)=Q$

Imponiamo la condizione $f(P)=Q$

$$\begin{pmatrix} a & a-1 \\ d-1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-a \\ 1-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a+2a-2 \\ d-1+2d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-a \\ 1-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a-1=2 \\ 2d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3/2 \\ d=1/2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ L'affinità richiesta è

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

3) Tra le affinità trovate in (1), det le eventuali traslazioni.

Sol

- $f$ è una traslazione $\Leftrightarrow$ l'automorfismo associato è l'identità
- $f$ è una traslazione $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} a & a-1 \\ d-1 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow a = d = 1$

ESERCIZIO 7

APPLICHIAMO LA TRASFORMAZIONE

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y - 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' + 1 \end{cases}$$

L'ASSE DI RIFLESSIONE DIVENTA

$$x + y - 1 = 0 \longrightarrow x' + (y' + 1) - 1 = 0$$

$$\longrightarrow x' + y' = 0 \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y' = 0$$

LA RETTA r TRASFORMATA È

$$x + 2y + 5 = 0 \longrightarrow x' + 2(y' + 1) + 5 = 0$$

$$\longrightarrow x' + 2y' + 7 = 0$$

LA MATRICE ASSOCIATA ALLA RIFLESSIONE È DETERMINATA DAL SISTEMA

$$\begin{cases} \sin(\theta/2) = 1/\sqrt{2} \\ -\cos(\theta/2) = 1/\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\frac{\theta}{2} = \frac{3}{4}\pi \longrightarrow \theta = \frac{3}{2}\pi$$

LA RIFLESSIONE È

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{3}{2}\pi & \sin \frac{3}{2}\pi \\ \sin \frac{3}{2}\pi & -\cos \frac{3}{2}\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x'' = -y' \\ y'' = -x' \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x' = -y'' \\ y' = -x'' \end{cases}$$

LA RETTA r SOTTOPOSTA AD UNA SECONDA TRASFORMAZIONE DIVENTA

$$x' + 2y' + 7 = 0 \longrightarrow -y'' - 2x'' + 7 = 0$$

APPLICHIAMO L'ULTIMA TRASFORMAZIONE (INVERSA DELLA PRIMA)

$$\begin{cases} x''' = x'' \\ y''' = y'' + 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x'' = x''' \\ y'' = y''' - 1 \end{cases}$$

LA RETTA r DIVENTA

$$-y'' - 2x'' + 7 = 0 \longrightarrow -y''' + 1 - 2x''' + 7 = 0$$

$$\longrightarrow -2x''' - y''' + 8 = 0$$

IN CONCLUSIONE, LA RIFLESSIONE DELLA RETTA $x + 2y + 5 = 0$ RISPETTO ALL'ASSE $x + y - 1 = 0$ È LA RETTA $-2x - y + 8 = 0$