Università degli Studi di Roma Tre, A.A. 2023/2024
Corso di Laurea Triennale in Fisica e Matematica
GE210 - Geometria e Algebra Lineare 2

Docente: Angelo Felice Lopez
Esercitatore: Luca Schaffler
Tutori: Ilaria Cruciani, Michele Matteucci

Tutorato 5

Esercizio 1. Nel piano affine numerico $\mathbb{A}_2(\mathbb{R})$ si fissi il riferimento standard $R(\mathcal{O}, \mathcal{B}_c)$. Si considerino le due terne di punti

$$\begin{gathered} P_0(1,2), \quad P_1(-1,0), \quad P_2(0,0), \\ Q_0(2,1), \quad Q_1(2,-3), \quad Q_2(3,-1) \end{gathered}$$

(i) Determinare le equazioni dell'affinità $f : \mathbb{A}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}_2(\mathbb{R})$ tale che $f(P_i) = Q_i$ per ogni $i = 0, 1, 2$.

(ii) Determinare, se esistono, i punti uniti di f(ovvero i punti fissi di f).

(iii) Considerata la retta r: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - t \end{cases}$, determinare equazioni parametriche e equazione cartesiana della retta $f(r)$.

Esercizio 2. Si consideri $f : E^3 \to E^3$ data da

$$f(x, y, z) = (\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y, z + 1).$$

(i) f è un'isometria?

(ii) Interpretando f come un cambio di coordinate cartesiane, calcolare l'immagine della retta $\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ tramite f.

Esercizio 3. In $\mathbb{A}_2(\mathbb{R})$ si fissi il riferimento standard $R(\mathcal{O}, \mathcal{B}_c)$. Per ciascuna delle seguenti affinità, si stabilisca se è una isometria e, in caso positivo, si stabilisca se si tratta di un'isometria diretta o inversa.

$$(i) \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1 - \sqrt{2} \\ y' = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1 \end{cases}$$

$$(ii) \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + 1 \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + 3 \end{cases}$$

$$(iii) \begin{cases} x' = y + 5 \\ y' = x - 3 \end{cases}$$

$$(iv) \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases}$$

$$(v) \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = -\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases}$$

Esercizio 4. Stabilire se le isometrie dirette dell'esercizio 3 sono traslazioni o rotazioni, e in quest'ultimo caso trovare il centro della rotazione.

Esercizio 5. Sia f un'affinità su uno spazio affine A. Verificare che se f fissa due punti P e $Q \in A$ allora fissa tutti i punti della retta passante per per P e Q.

Esercizio 6. Sia $A = \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ un piano affine con riferimento $\mathcal{O}, e_1, e_2$.

(i) Determinare l'equazione di ogni affinità f di A che fissa i punti della retta r di equazione $x + y = 1$;

(ii) Considerati i punti $P = (1, 2)$, $Q = (2, 1) \in A$, tra le affinità considerate in (1) determinare quelle (eventuali) che trasformano P in Q;

(iv) Tra le affinità considerate in (1) determinare eventuali traslazioni.

Esercizio 7. In E^2 la riflessione con asse $\sin(\theta/2)X - \cos(\theta/2)Y = 0$ è l'isometria

$$\rho_\theta(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Si consideri la retta $r : x + 2y + 5 = 0$; Calcolare l'immagine di r tramite la riflessione di asse $x + y - 1 = 0$.