TUTORATO 6

ESERCIZIO 1:

Sia $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonica di uno spazio vettoriale reale V.

Sia $T: V \to V$ l'operatore lineare che nella base e è dato dalla matrice simmetrica A

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Determiniamo una base ortonormale rispetto alla quale la matrice di T è in forma diagonale:

- Per poter applicare il teorema spettrale dobbiamo avere che T è un operatore simmetrico, ora

T è simmetrico se $M_e(T)$ è simmetrica con e base ortonormale.

Nel nostro caso la base canonica e è una base ortonormale (~~ortonormale rispetto al prodotto scalare standard~~) infatti basta prendere il prodotto scalare standard ed $M_e(T) = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ è una matrice simmetrica $\Rightarrow$ T è simmetrico

$\Rightarrow$ Per il teorema spettrale esiste una base $\{v_1, v_2\} = B$ tale $M_B(T)$ è diagonale

Calcoliamo il polinomio caratteristico:

$$\begin{vmatrix} -t & 1 \\ 1 & -t \end{vmatrix} = t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$$

$\Rightarrow$ gli autovalori sono $\{\pm 1\}$

Calcoliamo gli autovettori

V_1 : voglio i vettori $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tali che $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

ovvero $(A - 1 \cdot I_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$

$$(A - 1 \cdot I_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$ sono tutti i vettori che risolvono questo sistema lineare omogeneo

Risolvo e ottengo $\{ x_1 = x_2 \Rightarrow V_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

V_{-1} : Ragionando analogamente si ha

$$(A - (-1)I_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \{ x_1 = -x_2 \Rightarrow V_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Chiamo $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

NORMALIZZO i vettori $v_1' = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{v_1}{\sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$v_2' = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{v_2}{\sqrt{\langle v_2, v_2 \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \underset{B'}{\underset{\shortparallel}{\{v_1, v_2\}}}$ è la base ortonormale tale che $M_B(T)$ è in forma diagonale.

~~La matrice che diagonalizza T, ovvero~~
~~ovvero tale che~~

La matrice che diagonalizza T, ovvero che diagonalizza $A = M_e(T)$ è una matrice M tale che
(ortogonale)

$$M^t M_e(T) M = M^{-1} M_e(T) M = M_{B'}(T)$$

↓ matrice diagonale

e quindi $M \in O(2)$ è la matrice di cambiamento di base dalla base B' alla base e

$$M = M_{B'e} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

e $M \in O(2)$ e $M^{-1} A M = D$

Dove D è una matrice diagonale, sulla diagonale gli autovalori ovvero $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

OSSERVAZIONE: le colonne di M sono le coordinate dei vettori della base B' nella base e di partenza.

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Determinare una base ortonormale rispetto alla quale la matrice di T è in forma diagonale.

Come nel caso precedente: sia $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$
↳ ortonormale rispetto a $\langle , \rangle$ standard

allora si ha $M_e(T)$ è simmetrica
$\Rightarrow$ T è simmetrico.

$\Rightarrow$ Possiamo applicare il teorema spettrale

Calcoliamo il polinomio caratteristico

$$\begin{vmatrix} 1-t & 0 & 1 \\ 0 & 1-t & 2 \\ 1 & 2 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)\left[(1-t)^2-4\right] - (1-t) =$$

$$= (1-t)(t^2-2t-4)$$

AUTOVALORI
$t_1 = 1$
$t_2 = 1+\sqrt{5}$
$t_3 = 1-\sqrt{5}$

Calcoliamo gli autospazi relativi agli autovalori:

- V_1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow V_1 = \langle \overset{v_1}{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \rangle$

$V_{1+\sqrt{5}}$:

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{5} & 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{5} & 2 \\ 1 & 2 & -\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3 = \sqrt{5}\, x_2 \\ x_2 = 2\, x_1 \end{cases} \Rightarrow V_{1+\sqrt{5}} = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}}_{= v_2} \right\rangle$$

- $V_{1-\sqrt{5}}$:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{5} & 2 \\ 1 & 2 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_3 = -\sqrt{5}\, x_2 \\ x_2 = 2\, x_1 \end{cases} \Rightarrow V_{1-\sqrt{5}} = \left\langle \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix}}^{v_3 =} \right\rangle$$

una base ortogonale è data da

$$B = \{ v_1, v_2, v_3 \}$$

Ortonormalizziamo i vettori della base trovata

$$v_1' = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{v_1}{\sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle}} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2' = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 2/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$v_3' = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \left\langle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 2/\sqrt{10} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\Rightarrow$ La base B'

è la base ortonormale che diagonalizza T, ovvero tale che $M_{B'}(T)$ è diagonale

e $M = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{10} & 2/\sqrt{10} \\ 0 & 1/\sqrt{10} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

ESERCIZIO 2

(i)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

A È ORTONORMALMENTE DIAGONALIZZABILE SE E SOLO SE A È SIMMETRICA, OVVERO SE E SOLO SE $a = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & a \\ 0 & a & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - a^2)$$

GLI AUTOVALORI SONO

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = a$

$\lambda_3 = -a$

STUDIAMO I CASI

1) $a = 1$

2) $a = -1$

3) $a = 0$

4) $a \neq 0, a \neq \pm 1$

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

LA MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA E GEOMETRICA DELL'AUTOVALORE 1 È 2, SCRIVIAMO L'AUTOSPAZIO

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle$$

LA MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA E GEOMETRICA DELL'AUTOVALORE −1 È 1, SCRIVIAMO L'AUTOSPAZIO

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle$$

UNA DIAGONALIZZAZIONE È

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

IL CASO È DEL TUTTO ANALOGO A QUELLO PRECEDENTE, E UNA DIAGONALIZZAZIONE È

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

LA MATRICE È GIÀ DIAGONALE

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$

OGNI AUTOVALORE HA MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA E GEOMETRICA PARI A 1, CALCOLIAMO GLI AUTOSPAZI

$\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\lambda_2 = a$

$$\begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 \\ 0 & -a & a \\ 0 & a & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\lambda_3 = -a$

$$\begin{pmatrix} 1+a & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle$$

UNA DIAGONALIZZAZIONE È

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 2

(ii) $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

A È ORTONORMALMENTE DIAGONALIZZABILE SE E SOLO SE A È SIMMETRICA, OVVERO SE E SOLO SE $b=0$.

PONIAMO $b=0$.

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 1\right] = p(\lambda)$$

$$p(\lambda) = 0 \iff \lambda = a \vee (1-\lambda)^2 = 1 \iff$$

$$\lambda = a \vee \lambda = 1 \pm 1 \iff \lambda_1 = a \vee \lambda_2 = 2 \vee \lambda_3 = 0$$

~~STUDIAMO I CASI~~

~~1)~~

~~2)~~

~~3) $\lambda \neq 2, \lambda \neq 0$~~

STUDIAMO I CASI

1) $a = 0$

2) $a = 2$

3) $a \neq 0, a \neq 2$

1) $a = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

L'AUTOVALORE 0 HA MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA E GEOMETRICA PARI A 2, CALCOLIAMO L'AUTOSPAZIO RELATIVO A 0

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow y = -z$$

L'AUTOSPAZIO È $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle$

L'AUTOVALORE 2 HA MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA E GEOMETRICA PARI A 1, CALCOLIAMO L'AUTOSPAZIO RELATIVO A 2

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$$

L'AUTOSPAZIO È $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle$

LA DIAGONALIZZAZIONE È

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

2) $a = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

L'AUTOVALORE 0 HA MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA E GEOMETRICA PARI A 1, CALCOLIAMO L'AUTOSPAZIO RELATIVO A 0

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases}$$

L'AUTOSPAZIO È $< \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} >$

L'AUTOVALORE 2 HA MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA E GEOMETRICA PARI A 2, CALCOLIAMO L'AUTOSPAZIO RELATIVO A 2

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow y = z$$

L'AUTOSPAZIO È $< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} >$

LA DIAGONALIZZAZIONE È

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

3) $a \neq 0,\ a \neq 2$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

TUTTI GLI AUTOVALORI (OVVERO a, 0 E 2) HANNO MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA E GEOMETRICA PARI A 1, CALCOLIAMO GLI AUTOSPAZI

AUTOSPAZIO DI $\lambda = a$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 1 \\ 0 & 1 & 1-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \to \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

AUTOSPAZIO DI $\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases} \to \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle$$

AUTOSPAZIO DI $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} a-2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases} \to \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle$$

LA DIAGONALIZZAZIONE È

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 2

(iii)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A SIMMETRICA $\Longleftrightarrow$ $a = 1$

QUINDI A È ORTONORMALMENTE DIAGONALIZZABILE SE E SOLO SE $a = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & b-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (b-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 1\right] = p(\lambda)$$

$p(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = b \ \vee \ 1-\lambda = \pm 1$

$\Longleftrightarrow \lambda = b \ \vee \ \lambda = 0 \ \vee \ \lambda = 2$

STUDIANDO I CASI

1) $b=0$

2) $b=2$

3) $b \neq 0,\ b \neq 2$

SI OTTIENE UNA DIAGONALIZZAZIONE CHE VA BENE PER CIASCUNO DEI TRE CASI

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 4

Si verifichi che l'insieme

$\{ (i, -1, 0, i), (0, i, i, i), (1, i, 0, i), (-i, 0, 1, 0) \}$

è una base di $\mathbb{C}^4$ e la si ortonormalizzi rispetto al prodotto Hermitiano standard.

Sol

- Sono 4 vettori di $\mathbb{C}^4$, per vedere se sono una base basta verificare che sono linearmente indipendenti.

Per esempio calcolare

$$\det \begin{pmatrix} i & 0 & 1 & -i \\ -1 & i & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 1 \\ i & i & i & 0 \end{pmatrix}$$

e poi vedere che è diverso da zero.

① Scriviamo la definizione di Prodotto Hermitiano standard (e canonico).

Siano $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

Quindi nel nostro caso $n=4$, $\langle X, Y \rangle = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + x_3\overline{y_3} + x_4\overline{y_4}$.

Costruiamo la base ortogonale

Sia $v_1 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ i \\ i \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$; $v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Poniamo

$w_1 = v_1$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \cdot w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ i \\ i \end{pmatrix} - \frac{(i+1)}{3} \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-i+1}{3} \\ \frac{2i-1}{3} \\ i \\ \frac{2i-1}{3} \end{pmatrix}$$

(dove $\langle v_2, w_1 \rangle = 0 \cdot (\overline{i}) + i \cdot (-1) + i \cdot 0 + i \cdot \overline{(i)} = i+1$

$\langle w_1, w_1 \rangle = i \cdot (-i) + (-1)(-1) + 0 + i \cdot (-i) = 3$

Analogamente

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \cdot w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} \cdot w_2$$

$$w_4 = v_4 - \frac{\langle v_4, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \cdot w_1 - \frac{\langle v_4, v_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} \cdot w_2$$

$$- \frac{\langle v_4, w_3 \rangle}{\langle w_3, w_3 \rangle} \cdot w_3$$

e $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ sono la base ortogonale

e per ottenere

$$u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{w_1}{\sqrt{\langle w_1, w_1 \rangle}} = \frac{1}{3} w_2$$

$$u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}, \quad u_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} \quad e \quad u_4 = \frac{u_3}{\|u_4\|}$$

e $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ è la base ortonormale cercata.

ESERCIZIO 5

Stabilire quali delle seguenti matrici sono Hermitiane

Sol

una matrice è Hermitiana se $A = \bar{A}^t$

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{pmatrix}$:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{pmatrix} \quad e \quad \bar{A}^t = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{pmatrix} = A$$

$\Rightarrow$ A è Hermitiana

2) $B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$:

$$B^t = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{B}^t = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \neq B$$

$\Rightarrow$ B non è Hermitiana

3) $C = \begin{pmatrix} i & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$:

$$C^t = \begin{pmatrix} i & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \neq \bar{C}^t = \begin{pmatrix} -i & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \neq C$$

$\Rightarrow$ C non è Hermitiana

4) $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & 2 & 1+i \\ -i & 1-i & 0 \end{pmatrix}$:

$D^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -i \\ 1 & 2 & 1-i \\ 1 & 1+i & 0 \end{pmatrix}$ e $\bar{D}^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & 2 & 1+i \\ -1 & 1-i & 0 \end{pmatrix} = D$

$\Rightarrow D$ è Hermitiana

ESERCIZIO 6

$$M_h = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{DET } M_h = 1 \rightarrow \text{RANK } M_h = 3$$

IL VETTORE $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ È NON ISOTROPO

$$(x \quad y \quad z) \begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x \quad y \quad z) \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$$

$$6x + y + 5z = 0$$

SCEGLIAMO $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ $h(V_2, V_2) = 11 \neq 0$

$$(x \quad y \quad z) \begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x \quad y \quad z) \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 3y + 5z = 0 \\ 6x + y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} 3y + 4z = 0 \\ 18x + 3y + 15z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y = -4z \\ 18x - 4z + 15z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3y = -4z \\ 18x = -11z \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} y = -\frac{4}{3} z \\ x = -\frac{11}{18} z \end{cases} \rightarrow \quad v_3 = \begin{pmatrix} -11/18 \\ -4/3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 18 = \begin{pmatrix} -11 \\ -24 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$h(v_3, v_3) = 66 \neq 0$$

IN CONCLUSIONE UNA BASE PER CUI h SI SCRIVA IN FORMA CANONICA E'

$$\left\{ v_1, \frac{1}{\sqrt{11}} v_2, \frac{1}{\sqrt{66}} v_3 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5/\sqrt{11} \\ -1/\sqrt{11} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -11/\sqrt{66} \\ -24/\sqrt{66} \\ 18/\sqrt{66} \end{pmatrix} \right\}$$

ESERCIZIO 3:

RICORDANDO CHE OGNI FORMA HERMITIANA SU $\mathbb{C}^N$ È DEL TIPO

$$\langle (x_1, \dots, x_N), (y_1, \dots, y_N) \rangle = (x_1 \cdots x_N)\, H \begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \vdots \\ \overline{y_N} \end{pmatrix}$$

DOVE H È UNA MATRICE $N \times N$ HERMITIANA, VEDIAMO SUBITO CHE LE UNICHE DUE FORME HERMITIANE SONO QUELLE DEI PUNTI (iii) E (v).

ESERCIZIO 7

Data la matrice Hermitiana A, determinare una matrice unitaria U tale che

$$U^{-1} A U = U^{*} A U \quad \text{diagonale}$$

dove con $U^{*} = \overline{U}^{t}$

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$

La matrice A è Hermitiana.

Sia V uno spazio vettoriale hermitiano e sia $e = \{e_1, e_2\}$ una base ortonormale, RISPETTO A UN PRODOTTO HERMITIANO h.

Sia $T: V \longrightarrow V$ ($T \in End(V)$) l'operatore che nella base e è dato dalla matrice A (ovvero $A = M_e(T)$).

RICORDIAMO:

$$T \text{ è Hermitiano} \iff M_e(T) \text{ è Hermitiana}$$
con e base ortonormale

$\Rightarrow$ L'operatore T dato dalla matrice A è Hermitiano

Allora per il Teorema spettrale complesso esiste una base ortonormale che diagonalizza T, ovvero $\exists$ una base B tale che $M_B(T)$ è diagonale.

In particolare $\exists$ una matrice unitaria U tale che

$$\underset{M_B(T)}{\overset{\|}{D}} = U^{-1} A U = \overline{U}^t A U$$

Come si sceglie la matrice U sarà data dalla matrice del cambiamento di base, ~~della~~ dalla base B trovata alla base e di partenza e la base B sarà composta dagli autovettori NORMALIZZATI, RISPETTO al prodotto Hermitiano dato.

● NOTA: (UTILE PER IL CALCOLO DEI VETTORI NORMALIZZATI)

Se h è un prodotto Hermitiano e e è una base ortonormale rispetto al prodotto Hermitiano allora si ha $M_e(h) = I_n$

Allora il prodotto Hermitiano h diventa il prodotto Hermitiano standard, infatti

Dati due vettori $v, w \in V$ si ha

$$h(v,w) = v^t \underbrace{M_e(h)}_{M_e(h) = I_n} \overline{w} = v^t \cdot \overline{w}$$ → prodotto Hermitiano standard

Quindi quando dovremo calcolare

$$\|v\| = \sqrt{h(v,v)} = \sqrt{v^t \cdot I_n \cdot \overline{w}} = \sqrt{v^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overline{w}}$$

... ortonormale)

$\Downarrow$ vedi osservazione ②

Procediamo con l'esercizio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico

$$\begin{vmatrix} 1-t & i \\ -i & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} t_1 = 2 \\ t_2 = 0 \end{array}$$

Calcoliamo gli autovettori:

- V_2:

$$\begin{pmatrix} -1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = i\, x_2 \end{cases} \Rightarrow \quad V_2 = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}}_{= v_1} \rangle$$

$$v_1' = \frac{v_1}{\|v_1\|}, \text{ dove } \|v_1\| = \sqrt{\underbrace{(i\ 1)}_{= v_1^t} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= M_e(h)} \underbrace{\begin{pmatrix} \bar{i} \\ 1 \end{pmatrix}}_{= \bar{v}_1}} = \sqrt{i(-i)+1} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow v_1' = \langle \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \rangle$$

2 • V_0 :

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{ x_2 = i x_1 \Rightarrow V_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\parallel V_2$

Ora $V_2' = \dfrac{V_2}{\|V_2\|}$ e $\|V_2\| = \sqrt{2}$ Vedere prima

$$\Rightarrow V_2' = \left\langle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\Rightarrow$ La base B diagonalizzante è

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$$

e la matrice unitaria U tale che

$$U^{-1} A U = \bar{U}^t A U = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e $U = \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

dove $U = M_{B,e}$

OSSERVAZIONE 1) Le colonne di U sono le coordinate dei vettori della base B nella base e ortonormale di partenza.

~~2) B è una base ortonormale rispetto al prodotto Hermitiano tra due vettori~~

2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ragioniamo come nel caso 1)
Procediamo direttamente con i calcoli

Polinomio caratteristico:

$$\begin{vmatrix} -t & 0 & -i \\ 0 & 1-t & 0 \\ i & 0 & -t \end{vmatrix} = +t^2(1-t) + i^2(1-t) =$$
$$= t^2 - t^3 - 1 + t =$$
$$= -t^3 + t^2 + t - 1 =$$
$$= -t^2(t-1) + (t-1) = (t-1)(-t^2+1)$$

Autovalori

$t_1 = 1$
$t_2 = 1$
$t_3 = -1$

V_1:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{cases} +x_1 = -i x_3 \\ x_2 = t \end{cases} \Rightarrow V_1 = \langle \underset{\overset{\parallel}{v_1}}{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{\overset{\parallel}{v_2}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \rangle$

$\Rightarrow v_1' = \frac{v_1}{\|v_1\|} \longrightarrow$ $\|v_1\| = \sqrt{h(v_1, v_1)}$ come prima

$v_2' = \frac{v_2}{\|v_2\|} \longrightarrow$ basta prendere il prodotto Hermitiano standard

$$V_{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 2 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = i x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow V_{-1} = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}}_{v_3} \rangle$$

e $v_3' = \dfrac{v_3}{\| v_3 \|}$

$\Rightarrow$ $\{ v_1', v_2', v_3' \}$ è la base diagonalizzante e

$$U = ([v_1']_e, [v_2']_e, [v_3']_e)$$

ESERCIZIO 8

Sia V uno spazio euclideo e sia $u \in V$ un vettore di norma unitaria.

La riflessione rispetto all'iperpiano $u^\perp$ è l'endomorfismo $\sigma_u : V \longrightarrow V$ definito come

$$\sigma_u(v) = v - 2 \langle v, u \rangle u$$

Dimostrare

- σ_u è simmetrico : $\langle \sigma_u(v), w \rangle = \langle v, \sigma_u(w) \rangle$

$\langle \sigma_u(v), w \rangle = \langle v - 2 \langle v, u \rangle u, w \rangle =$

$= \langle v, w \rangle - 2 \langle v, u \rangle \langle u, w \rangle =$

$= \langle w, v \rangle - 2 \langle w, u \rangle \langle u, v \rangle =$

$= \langle \sigma_u(w), v \rangle = \langle v, \sigma_u(w) \rangle$

Quindi σ_u è simmetrico.

- Trovare una base ortonormale di autovettori di σ_u:

se $F \in End(V)$ un autovettore è un vettore v tale che $F(v) = \lambda v$ con λ autovalore di F

Nel nostro caso: sia $v \in \langle u \rangle^\perp$

Allora $\sigma_u(v) = v - 2 \underbrace{\langle v, u \rangle}_{0 \,\to\, v \perp u} u = v$

$\Rightarrow$ se $v \in \langle u \rangle^\perp$ abbiamo 1 come autovalore

- Quindi $\langle u^\perp \rangle$ è l'autospazio di σ_u relativo all'autovalore 1 (e dim $\langle u \rangle^\perp = n-1$

- Ragionando analogamente $\langle u \rangle$ è l'autospazio di σ_u relativo a -1 e dim$\langle u \rangle = 1$

(infatti $\sigma_u(u) = u - 2 \langle u, u \rangle \cdot u = u - 2u = -u = -1 \cdot u$)

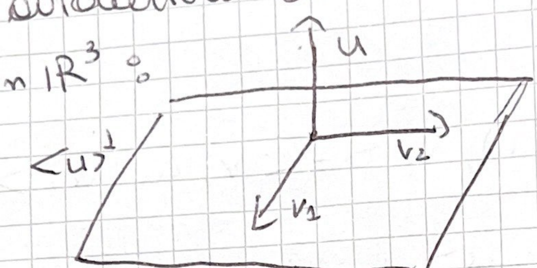
u è di norma unitaria

Sia ora B una base ortonormale di $\langle u \rangle^\perp$
(ovvero basta prendere una base di $\langle u \rangle^\perp$ e ortonormalizzarla)

allora $B \cup \{u\}$ è → unitario

una base ortonormale di V contenente gli autovettori di ...

Esempio in $\mathbb{R}^3$:



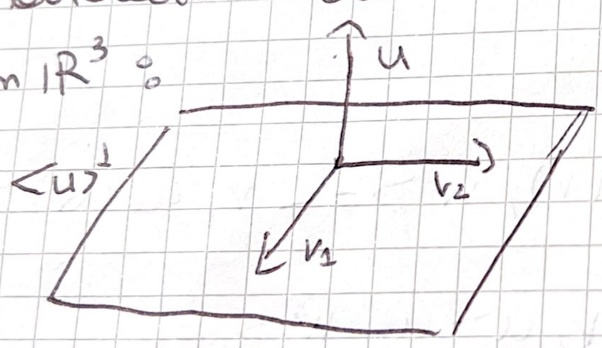
$B = \{v_1, v_2\}$

Sia ora B una base ortonormale di $\langle u \rangle^\perp$ (ovvero basta prendere una base di $\langle u \rangle^\perp$ e ortonormalizzarla)

u è unitario

allora $B \cup \{u\}$ è una base ortonormale di V contenente gli autovettori di σ_u

Esempio in $\mathbb{R}^3$:



$B = \{v_1, v_2\}$