Università degli Studi di Roma Tre, A.A. 2023/2024
Corso di Laurea Triennale in Fisica e Matematica
GE210 - Geometria e Algebra Lineare 2

Docente: Angelo Felice Lopez
Esercitatore: Luca Schaffler
Tutori: Ilaria Cruciani, Michele Matteucci

Tutorato 6

Esercizio 1. Sia $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonica di uno spazio vettoriale reale V. Sia $T : V \to V$ l'operatore lineare che nella base e è dato dalla matrice reale simmetrica A

(i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Determinare una base ortonormale rispetto alla quale la matrice di T è in forma diagonale. Inoltre scrivere esplicitamente una matrice ortogonale che diagonalizza T, ovvero trovare una matrice M ortogonale tale che $M^{-1}AM = M^tAM$ è diagonale.

Esercizio 2. Sia $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonica di uno spazio vettoriale reale V. Sia $T : V \to V$ l'operatore lineare che nella base e è dato dalla matrice reale A

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$

(ii) $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Determinare per quali valori $a, b \in \mathbb{R}$ l'operatore T è diagonalizzabile tramite una base ortonormale; per tali valori, diagonalizzare T tramite un'opportuna matrice ortogonale.

Esercizio 3. Stabilire quali tra le seguenti sono forme hermitiane su $\mathbb{C}^2$:

(i) $\langle x, y\rangle = x_1\overline{y}_1 + ix_1\overline{y}_2 + ix_2\overline{y}_1$;

(ii) $\langle x, y\rangle = i|x_1||y_1|$;

(iii) $\langle x, y\rangle = x_1\overline{y}_1 + 2ix_1\overline{y}_2 - 2ix_2\overline{y}_1$;

(iv) $\langle x, y\rangle = 1 + x_1\overline{y}_1 + x_1\overline{y}_2$;

(v) $\langle x, y\rangle = x_1\overline{y}_1 + 2x_2\overline{y}_2$;

Esercizio 4. Si verifichi che l'insieme $\{(i, -1, 0, i), (0, i, i, i), (1, i, 0, i), (-i, 0, 1, 0)\}$ è una base di $\mathbb{C}^4$ e lo si ortonormalizzi rispetto al prodotto hermitiano standard.

Esercizio 5. Stabilie quali dele seguenti matrici sono hermitiane:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} i & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & 2 & 1+i \\ -i & 1-i & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} i & 1 & i \\ -1 & 2 & 2i \\ -1 & -2i & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 6. Sia $V = \mathbb{C}^3$ con la base canonica $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ e si considerino la seguente forma hermitiana:

$$h(x, y) = 6x_1\overline{y}_1 + x_1\overline{y}_2 + 5x_1\overline{y}_3 + x_2\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + 2x_2\overline{y}_3 + 5x_3\overline{y}_1 + 2x_3\overline{y}_2 + 6x_3\overline{y}_3$$

Trovare il rango e determinare una base rispetto alla quale la matrice associata è in forma canonica. Questa base è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard di V? Motivare la risposta.

Esercizio 7. Data la matrice hermitiana A, determinare una matrice unitaria U tale che $U^{-1}AU = U^*AU$ sia diagonale.

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$

(ii) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Esercizio 8. Sia V uno spazio euclideo e sia $u \in V$ un vettore di norma unitaria. La riflessione rispetto all'iperpiano $u^\perp$ è l'endomorfismo $\sigma_u : V \to V$ definito come $\sigma_u(v) = v - 2\langle v, u\rangle u$. Dimostrare che σ_u è simmetrico e trovare una base ortonormale di autovettori di σ_u.